Mathematics for Economics
ECON 53035
MA/MSSc in Economics-2017/2018

Dr. W. M. Semasinghe
Senior Lecturer
Department of Economics

ශ්‍රිත (Functions)

❖එක් ආදාන සංඛ්‍යාවකට (input number) එක් ප්‍රතිදාන සංඛ්‍යාවක් (output number) පැවරෙන ලෙස අර්ථ දක්වන ලද නීතියක්.

y යන විචල්‍යයේ අගය x යන තවත් විචල්‍යයක අගය මත රඳා පවතී නම් y විචල්‍යය x විචල්‍යයේ ශ්‍රිතයකි.

$$y = f(x)$$

y → පරායත්ත විචල්‍යය (dependent variable)

x → ස්වායත්ත විචල්‍යය (independent variable)/විස්තාරය (argument)

f → ශ්‍රිතීය සම්බන්ධතාවේ ආකාරය

eg:-

$$q = f(p) \qquad s = f(yd)$$
$$p = f(q) \qquad c = f\,(yd)$$
$$TC = f(q) \qquad TR = f(q)$$

$F, G, g, h, \theta, \varphi, \psi, \Phi, \Psi$ යනාදි සංකේත ද යොදා ගනී

y හා z, x විචල්‍යයේ ශ්‍රිත නම්???

අර්ථ දක්වන ලද නීතියට අදාළ වන ආදාන සංඛ්‍යා කාණ්ඩය ශ්‍රිතයේ ***වසම*** *(domain)* ලෙස හැඳින්වේ.

සියලුම ප්‍රතිදාන සංඛ්‍යා කාණ්ඩය ශ්‍රිතයේ ***පරාසය*** *(range)* ලෙස හැඳින්වේ.

$$y = f(x) = 18x - 3x^2$$

x ආදාන සංඛ්‍යාව ඕනෑම තාත්වික සංඛ්‍යාවක් වන විට y ප්‍රතිදාන සංඛ්‍යාව ද තාත්වික සංඛ්‍යාවක් වේ. එවිට ශ්‍රිතයේ වසම තාත්වික සංඛ්‍යා කාණ්ඩයකි R

$$y = \frac{2x + 3}{x - 1}$$

මෙහි y තාත්වික සංඛ්‍යාවක් වන්නේ x, විචල්‍යය 1හැර ඕනෑම

තාත්වික සංඛ්‍යාවක් වන විට පමණි.

ශ්‍රිතයේ වසම 1 හැර ඕනෑම තාත්වික සංඛ්‍යාවකි R – {1} or x≠1

බොහෝ ආර්ථික විද්‍යාත්මක විචල්‍ය ස්වභාවයෙන්ම සීමාවක් තුළ පිහිටි ශූන්‍ය නොවන අගය ගනී.

∴ ආර්ථික විද්‍යාත්මක ආකෘතිවල වසම එකී සීමාව තුළ පිහිටයි.

නිදඃ

ආයතනයක මුළු පිරිවැය දෛනික නිෂ්පාදිතයේ (Q), C=150+7Q

ආකාරයේ ශ්‍රිතයකි

ආයතනයේ නිෂ්පාදන නිෂ්පාදන ධාරිතාව දිනකට ඒකක100කි.

පිරිවැය ශ්‍රිතයේ වසම හා පරාසය කුමක් වේ ද?

$$\text{Domain} = \{Q \mid 0 \le Q \le 100\}$$

$$\text{Range} = \{C \mid 150 \le C \le 850\}$$

❖ a යනු f(x) ශ්‍රිතයේ x හි යම් නිශ්චිත අගයක් නම් x = a වන විට ශ්‍රිතයේ අගය f(a) ලෙස දක්වයි

$$y = f(x) = \frac{x}{7x + 1}$$

f(a) = a/(7a + 1)

f(4) = 4/ 29

Types of Functions

❖Constant function: පරාසය නියතයකින්/එක් අගයකින් පමණක් සමන්විත ශ්‍රිත

$$y = 7$$

$$f(x) = 10$$

x හි අගය කවරක් වුව ද ශ්‍රිතයේ අගය නොවෙනස්ව පවතී

❖**බහු පද ශ්‍රිත (Polynomial Functions)**

General form of a Polynomial Functions of Degree n

$$\boldsymbol{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots.. + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n}$$

n ධන නිඛිලයකි. a_0 …..a_n නියත පද වන අතර $a_n \neq 0$

e.g. $f(x) = 8x^6 + 3x^4 - x^3 + 5x^2 + 2x + 3$ (polynomial of degree 6)

$f(x) = x^8 + 2x^5 + 3x^4 + 7x^2 + 6x - 5$ (polynomial of degree 8)

බහුපද ශ්‍රිතයේ n නිඛිලයේ අගය මත තීරණය වන විවිධ ස්වරූපයේ බහුපද ශ්‍රිත

when

$n = 0 \quad y = a_0$ Constant function

$n = 1 \quad y = a_0 + a_1x$ Linear function (polynomial of degree 1)

$n = 2 \quad y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ Quadratic function

$n = 3 \quad y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ Cubic function

- **පරිමේය ශ්‍රිත Rational Functions**

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \qquad f(x) = \frac{(3x^2 + 5)}{(2x - 1)}$$

$g(x)$ හා $h(x)$ බහුපද ශ්‍රිත වන අතර $h(x) \neq 0$

❖ සංයුක්ත ශ්‍රිත Composite Function or Function of a Function

$y = g(u)$ හා $u = f(x)$ නම් $y = g[f(x)]$

eg. 1 $f(x) = \sqrt{x}$ හා $g(x) = 3x + 1$ then

$f\,[g(x)] = f\{3x + 1] = \sqrt{3x + 1}$

2. If $f(x) = x + 3$ and $g(x) = 4x^2 – 5x$

$g[f(t)] = g(t+3)$

$= 4(t+3)^2 – 5\,(t + 3)$

❖Non-algebraic Functions

$$\left.\begin{array}{l} y = b^x, \\ y = e^t \end{array}\right\}$$ ආකාරයේ ඝාතීය ශ්‍රිත

සහ

$y = \log_b x$ ආකාරයේ ලඝුගණක ශ්‍රිත

Functions of Two or More independent variable

$z = f(x, y)$

$z = ax + by$

$v = f(L, K)$

$z = a_0 + a_1x + a_2x^2 + b_1y + b_2y^2$

$y = a_1x_1 + a_2x2 + a_3x_3 + \ldots . a_nx_n$

අවකලනය (Differentiation)

$y = f(x)$ ශ්‍රිතයේ x හි අගය Δx ප්‍රමාණයකින් වැඩි වන විට ශ්‍රිතයේ අගය එනම් y හි අගය සෙවීමට අවශ්‍ය යැයි සිතමු.

$$y = f(x) \qquad (1)$$

x විචල්‍යය Δx ප්‍රමාණයකින් වැඩි වන විට y හි අගය Δy ප්‍රමාණයකින් වැඩි වූයේ යැයි සිතමු.

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \qquad (2)$$

(2) - (1) $\quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad (3)$

(3) $\div \Delta x$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

මෙහි $\Delta x \xrightarrow{\text{සීමාව}} 0$ විට $\Delta y/\Delta x$ ආසන්න වන සීමාව x විෂයෙහි y හි

අවකලන සංගුණක (Differential coefficient) යි.

❖ $\Delta y/\Delta x$ සීමාකාරී අගය දැක්වීමට dy/dx යොදයි.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

eg. $y = 3x$ ………………… (1)

$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)$ …………(2)

(2) – (1) $\Delta y = 3(x + \Delta x) - 3x$

$\Delta y = 3\Delta x$ ………………(3)

(3) ÷ Δx $\Delta y/\Delta x = 3$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x = 3$$

Rules of Differentiation

u, v හා y යනු x හි ශ්‍රිතයන් ද k යනු නියතයක් ද වන විට

(1)Constant function rule

$$y = f(x) = k$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dk}{dx} = f'(x) = 0$$

(2) Power function rule

$$y = f(x) = x^n$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$$

(3) **Linear function rule**

$$y = f(x) = kx + 2$$

$$dy/dx = k$$

$$y = 9x + 6$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(9x + 6)}{dx} = 9$$

4. Generalized power function rule

$$y = kx^n$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(kx^n)}{dx} = knx^{n-1}$$

5. Sum-Difference rule

$$y = [f(x) \pm g(x)]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{d(g(x))}{dx}$$

eg. $y = 2x^3 + 4x^2 – 8x + 18$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(2x^3)}{dx} + \frac{d(4x^2)}{dx} - \frac{d(8x)}{dx} + \frac{d(18)}{dx}$$

$$= 6x2 + 8x - 8$$

(6). Function of a function rule

$$y = [f(x)]^n$$

ආකාරයේ ශ්‍රිත ශ්‍රිතයක ශ්‍රිත ලෙස හැඳින්වේ.

$$\frac{dy}{dx} = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$$

eg. $y = 3(2x + 5)^2$

Assume that $(2x + 5) = u$, then $y = 3u^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(3u^2)}{du} \cdot \frac{d(2x + 5)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (6u) \times 2 = 12u = 12\,(2x + 5)$$

7. Product rule

$$y = [f(x).g(x)]$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\frac{d[g(x)]}{dx} + g(x)\frac{d[g(x)]}{dx}$$

$f(x) = u$ හා $g(x) = v$

$$y = uv$$

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

eg. $y = (2x^3 - 3x)(x^2 + 5)$

$(2x^3 - 3x) = u$ හා $(x^2 + 5) = v$ නම්

$$\frac{dy}{dx} = (2x^3 - 3x)\frac{d(x^2 + 5)}{dx} + (x^2 + 5)\frac{d(2x^3 - 3x)}{dx}$$

$$= (2x^3 - 3x)(2x) + (x^2 + 5)(6x^2 - 3)$$

8. Quotient rule

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)\frac{df(x)}{dx} - f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{[g(x)]^2}$$

$f(x) = u \qquad g(x) = v$

$$y = \frac{u}{v}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

9. Chain rule

$y = f(u)$ හා $u = g(x)$ නම්

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\ \frac{du}{dx}$$

eg. $y = 3(2x + 5)^2$

$(2x + 5) = u$ නම් $y = 3u^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(3u^2)}{du}\ \frac{d(2x + 5)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 6u \text{ x } 2 = 12u = 12\ (2x + 5)$$

10. Exponential function rule

- බහුපද ශ්‍රිතයක ස්වායත්ත විචල්‍යයේ බලය ‘ඝාතය’ (exponent) ලෙස හඳුන්වන අතර එය නියතයකි.

  උදා: $y = 2x^3 + 4x^2 + 5$

- ස්වායත්ත විචල්‍යය ඝාතයක් වශයෙන් පිහිටන ශ්‍රිතයක් ‘ඝාතීය ශ්‍රිතයක්’ (Exponential function) ලෙස හඳුන්වයි,

  eg. $y = f(x) = b^x \quad (b>1)$

- මෙහි y හා x පිළිවෙලින් පරායත්ත හා ස්වායත්ත විචල්‍ය වන අතර b ඝාතයේ පාදය (base) යි.

කලනයේ දී ගණිතමය ක්‍රියාකාරකම්වල පහසුව සඳහා e නම් වන අපරිමේය සංඛ්‍යාවක් (e = 2.71828…) ඝාතයේ පාදය ලෙස යොදා ගනී.

eg. $y = e^x \qquad y = e^{3x} \qquad y = Ae^{rx}$

eg.(1) $y = e^x$

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

eg.(2) $y = e^u$ හා $u = f(x)$ නම්

$$\frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

11. Log-function rule

විචල්‍යයක් තවත් විචල්‍යයක ලඝුගණකයේ ශ්‍රිතයක් වශයෙන් ප්‍රකාශ කෙරෙන ශ්‍රිතයක් ලඝු ශ්‍රිතයක් (*Log function or Logarithmic function*) ලෙස හැඳින්වේ.

$$y = \log_b x$$

පෙර දී දැක් වූ පරිදි කලනයේ දී ලඝුගණකයේ පාදය වශයෙන් ගන්නේ e ය.

- e පාදයට ලඝු *natural logarithm* ලෙස හඳුන්වන අතර එය $\log_e$ හෝ ln මගින් සංකේතවත් කරයි.

$y = \log_e 2x$ හෝ $y = \ln 2x$

$$y = \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$y = k\ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = k\frac{d(\ln x)}{dx} = k\frac{1}{x} = \frac{k}{x}$$

$y = \log_e u$ හා $u = f(x)$ නම්

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

Inverse-function rule

y = f(x) ශ්‍රිතයේ x හි විවිධ අගය සඳහා y ට ද හැම විටම අනන්‍ය වූ වෙනස් අගය ලැබේ නම් ශ්‍රිතයට ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතයක් ඇති. එය,

$x = f^{-1}(y)$ ලෙස සංකේතවත් කරයි.

මෙවැනි ශ්‍රිතයක විශේෂත්වය වන්නේ x හි දෙනු ලැබූ ඕනෑම අගයක් සඳහා yට අනන්‍ය අගයක් (*unique value*) පවත්නා අතරම yට දෙනු ලබන ඕනෑම අගයක් සඳහා xට ද අනන්‍ය අගයක් පැවතීමයි.

මෙවැනි ශ්‍රිතයක පරායත්ත විචල්‍යයේ (x) අනුයාත වශයෙන් වැඩි වන අගය සඳහා ශ්‍රිතයට f(x) ද වැඩි වන අගය ලැබේ නම්, එනම්

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

එය ඒකවිධ වැඩි වන ශ්‍රිතයක් (monotonically increasing function) ලෙස හඳුන්වයි.

Higher Order Derivatives

ශ්‍රිතයක ව්‍යුත්පන්නය ශ්‍රිතයක් වන විට ව්‍යුත්පන්නයට ද ව්‍යුත්පන්නයක් ඇත.

$y = f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය එහි ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය (first derivative) යි. එය dy/dx හෝ $f'(x)$ ලෙස දක්වයි.

$f'(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය d^2y/dx^2 හෝ $f''(x)$ ලෙස දක්වයි. එය $f(x)$ හි දෙවන ව්‍යුත්පන්නයයි.

$y = f(x)$ නම්

1st derivative: $f'(x) = \dfrac{d\,(y)}{dx} = \dfrac{dy}{dx}$

2nd derivative: $f''(x) = \dfrac{d\,(dy/dx)}{dx} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$

3rd derivative: $$f'''(x) = \frac{d\,(d^2y/dx^2)}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$$

nth derivative: $$f^{n}(x) = \frac{d\,(d^{n-1}y/dx^{n-1})}{dx} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Find

i. $y = x^4 + 3x^2 - 2x + 7$ 3rd

ii. $y = x\sqrt{1 - 2x}$ 2nd

iii. $y = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$ 3rd

ආංශික අවකලනය Partial differentiation

මේ දක්වා සලකා බලන ලද්දේ පොදුවේ f(x) වශයෙන් දැක් වූ තනි ස්වායත්ත විචල්‍යයක් සහිත ශ්‍රිත පිළිබඳව ය. එහෙත් බොහෝ විට ස්වායත්ත විචල්‍ය එකකට වැඩි සංඛ්‍යාවක් පවත්නා අවස්ථා පිළිබඳ සලකා බැලීමට සිදු වේ.

x හා y යන ස්වායත්ත විචල්‍ය දෙක සහිත ශ්‍රිතයක්

$$z = f(x, y)$$

ලෙස දැක්විය හැකිය. z පරායත්ත විචල්‍යයයි.

y යනු $x_1, x_2, \ldots x_n$ නම් වූ ස්වායත්ත විචල්‍ය n සංඛ්‍යාවක ශ්‍රිතයක් නම්

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ලෙස දැක්විය හැකිය.

මෙවැනි බහු විචල්‍ය ශ්‍රිතයක, අනෙකුත් විචල්‍ය නොවෙනස්ව තිබිය දී එක් ස්වායත්ත විචල්‍යයක් ඉතා කුඩා ප්‍රමාණයකින් වෙනස් වන විට ශ්‍රිතයේ අගය සෙවීමට අවශ්‍ය වේ. මේ සඳහා ආංශික අවකලනය නම් ශිල්පීය ක්‍රමය භාවිත කරයි

ඒ අනුව $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ නම් බහු විචල්‍ය ශ්‍රිතයක අනෙකුත් විචල්‍ය ස්ථාවරව තිබිය දී එක් ස්වායත්ත විචල්‍යයක වෙනස් වීමට අනුරූපව y වෙනස් වන අනුපාතය ආංශික අවකලයෙන් (partial derivative) මැන දක්වයි.

$z = f(x, y)$ යන ශ්‍රිතයේ x විෂයෙහි y හි ආංශික අවකලය $\partial y/\partial x$ හෝ f_x මගින් නිරූපනය කරයි.

x විෂයෙහි z = f(x,y) ශ්‍රිතයේ ආංශික අවකලය ලබා ගැනීම සඳහා y නියතයක් යයි සලකා පොදු අවකලන නීති භාවිතයෙන් ශ්‍රිතය අවකලනය කළ හැකි ය.

eg. 1 $y = f(x_1,x_2) = 3x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = f_1 = 6x_1 + x_2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = f_2 = x_1 + 8x_2$$

i. When $f(x,y) = (x^2 - 7y)(x - 2)$ Find f_x and f_y

ii. When $f(x,y) = (2x - 3y)/(x + y)$ Find f_x and f_y

eg. 2. When $f(x,y) = (x^2 - 7y)(x - 2)$ Find f_x and f_y

$$f_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = (x^2 - 7y)(1) + (x - 2)(2x)$$

$$f_x = (x^2 - 7y) + (2x^2 - 4x)$$

$$f_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (x^2 - 7y)(0) + (x - 2)(-7)$$

$$f_y = (7x + 14)$$

$$f_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{(x + y)(2) - (2x - 3y)(1)}{(x + y)^2}$$

Partial Derivatives of Higher Order

- Higher partial derivatives are obtained in the same way as higher derivatives.
- For the function $z = f(x, y)$, there are four second order partial derivatives:

$$\text{i} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\partial z/\partial x) = (f_x)_x = f_{xx}$$

$$\text{ii} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\partial z/\partial y) = (f_y)_y = f_{yy}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{iii} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\partial z/\partial x) = (f_x)_y = f_{xy} \\ &\text{iv} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\partial z/\partial y) = (f_y)_x = f_{yx} \end{aligned}\right\} \text{Cross partial derivatives}$$

Find the four second order partial derivatives for each of the following function:

- $z = 7x \ln(1 + y)$
- $z = (2x + 5y)(7x - 3y)$
- $z = e^{4x - 7y}$
- $f(x) = 7x \ln(1 + y)$ යන ශ්‍රිතයේ
    i. පළමු වන හා දෙවන ආංශික අවකල අගයන්න
    ii. $f_{xy} = f_{yx}$ බව පෙන්වන්න
- $V = 20L^{½}K^{½}$ යන නිෂ්පාදන ශ්‍රිතයේ L හා K යනු පිළිවෙලින් ශ්‍රමය හා ප්‍රාග්ධනය වේ. එක් එක් සාධකය හීනවන ආන්තික ඵල පෙන්වන්නේ දැයි පරීක්ෂා කරන්න.
- $V = x_1x_2 - 0.2x_1^2 - 0.8x_2^2$ යන නිෂ්පාදන ශ්‍රිතයට අදාළව නිෂ්පාදන ශ්‍රිතයේ සාමාන්‍ය හා ආන්තික ඵලදා ශ්‍රිත ගොඩනංවන්න

ප්‍රශස්ථකරණය Optimization

- පවත්නා විකල්ප අතුරින් ප්‍රශස්ථම විකල්පය තේරීම ප්‍රශස්ථකරණයයි.

ප්‍රශස්ථකරණය

උපරිමකරණය Maximization

- ලාභ
- උපයෝගීතාව
- වර්ධන අනුපාතිකය
- අලෙවිය etc.

අවමකරණය Minimization

- නිෂ්පාදන පිරිවැය
- අවධානම etc.

$$y = f(x)$$

අරමුණු ශ්‍රිතය (objective function) යි. එය උපරිමකරණයක් හෝ අවමකරණයක් විය හැකිය.

x – ප්‍රවරණ විචල්‍ය (choice variable)

- තීරණ විචල්‍ය (decision variable)
- ප්‍රතිපත්ති විචල්‍ය (policy variable) යන නම්වලින් ද හඳුන්වයි. y උපරිම/අවම වීම සඳහා ගත යුතු අගය දක්වයි.

ව්‍යාරික ආයතනයක් ලාභ උපරිම කිරීමට අපේක්ෂා කරන්නේ යයි සිතමු. ආයතනයේ ලාභ උපරිම වන්නේ අයභාරය (R) හා පිරිවැය (C) අතර වෙනස උපරිම වන නිමැවුමේ (Q) දී ය. තාක්ෂණය හා වෙළෙඳ පොල ඉල්ලුම දෙනු ලැබ ඇති විට R හා C යන දෙකම Q හි ශ්‍රිතයකි. ඒ අනුව

$$\Pi = R(Q) - C(Q)$$

Π ආයතනයේ අරමුණ එනම් ප්‍රශස්ථ කළ යුත්තේ කුමක් ද යන්න ප්‍රකාශ කරන හෙයින් මේ ශ්‍රිතය ප්‍රශස්ථකරණයේ අරමුණු ශ්‍රිතයයි. Q ප්‍රවරණ විචල්‍යයයි. ඒ අනුව ප්‍රශස්ථකරණ ගැටළුව වන්නේ Π උපරිම වන Q සෙවීමයි.

ප්‍රස්ථාරිකව ශ්‍රිතයක උපරිම හා අවම ලක්ෂ්‍ය නිශ්චය කිරීම

- ❖ ප්‍රස්ථාරයක් මත යම් ලක්ෂ්‍යයක සිරස් ඛණ්ඩය ඒ දෙපස ඇති අනෙක් ලක්ෂ්‍යවලට අදාල සිරස් ඛණ්ඩවලට වඩා වැඩි උසකින් යුක්ත නම් එය සාපේක්ෂ උපරිමයකි (Reletive maximum) (ආසන්නම ඒවාට සාපේක්ෂව)

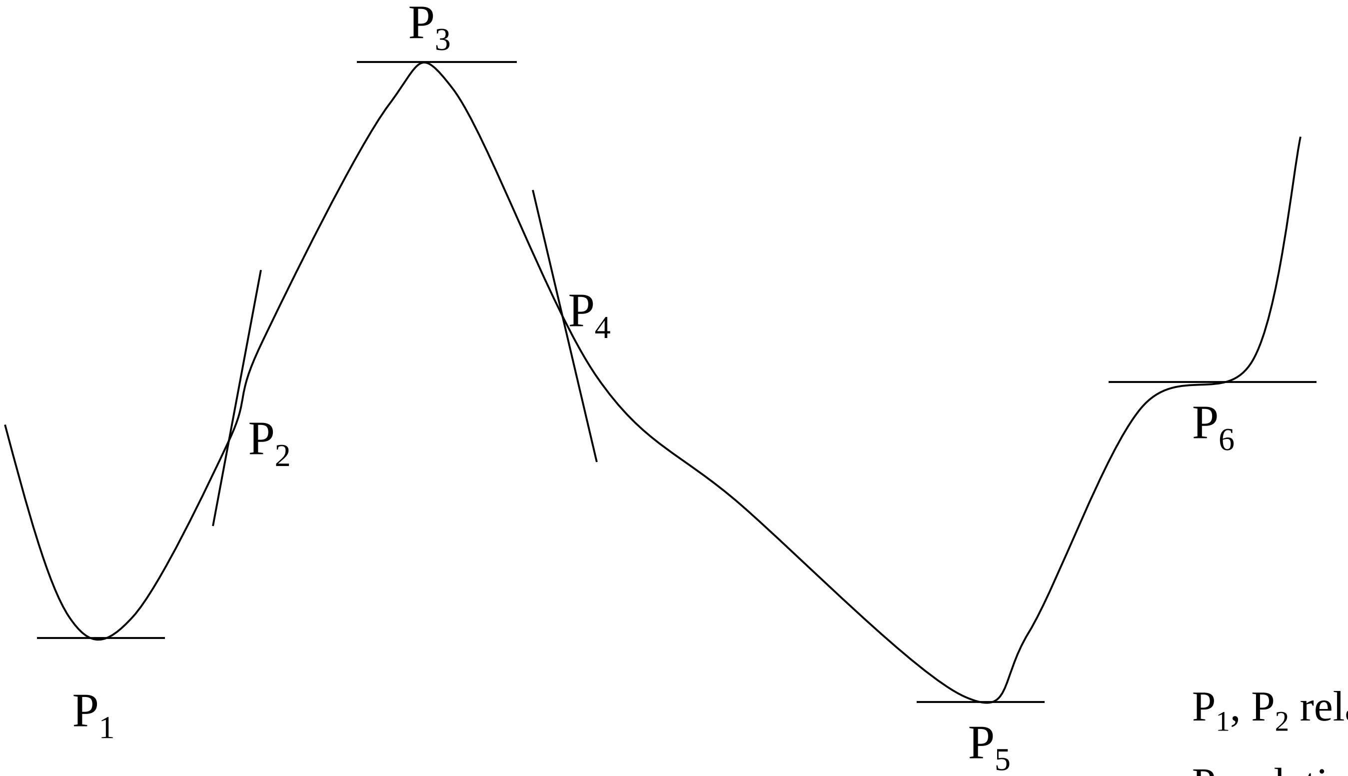
- ❖ ප්‍රස්ථාරයක් මත යම් ලක්ෂ්‍යයක සිරස් ඛණ්ඩය ඒ දෙපස ඇති අනෙක් ලක්ෂ්‍යවලට අදාල සිරස් ඛණ්ඩවලට වඩා උසින් අඩු නම් එය සාපේක්ෂ අවමයකි (Reletive minimum) (ආසන්නම ඒවාට සාපේක්ෂව)

- ❖ ශ්‍රිතයක උපරිම හෝ අවම හෝ ලක්ෂ්‍ය අත්‍යන්ත ලක්ෂ්‍ය (Relative or local extremum) වේ. මේ ලක්ෂ්‍යයකට අඳින ස්පර්ශකය තිරස් අක්ෂයට සමාන්තරව පිහිටන නිසා එහි බෑවුම ශූන්‍ය වේ. මෙවැනි ලක්ෂ්‍යයකට අදාලව ශ්‍රිතයේ ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය ශූන්‍ය වේ.

- ❖ යම් ලක්ෂ්‍යයකට අඳින ස්පර්ශකය වක්‍රය හරහා ගමන් කරයි නම් එම ලක්ෂ්‍යය නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයක් (Inflection point) ලෙස හඳුන්වයි. එම ලක්ෂ්‍යවල දී ශ්‍රිතයේ ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය ශූන්‍ය හෝ ධන හෝ ඍණ හෝ විය හැකිය. දෙවන ව්‍යුත්පන්නය අත්‍යවශ්‍යයෙන්ම ශූන්‍ය හෝ අනිශ්චිත හෝ වේ.

❖ ශ්‍රිතයක ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය ශූන්‍ය හෝ නිශ්චය කළ නොහැකි ලක්ෂ්‍ය අවධි ලක්ෂ්‍ය (Critical points) ලෙස හැඳින් වේ.

❖ මේ අනුව සැම අවධි ලක්ෂ්‍යයක්ම උපරිමයක්/අවමයක් නොවූව ද උපරිමයක් හෝ අවමයක් පැවතිය හැක්කේ අවධි ලක්ෂ්‍යයක දි පමණකි.



P_1, P_2 relative minimum

P_3 relative maximum

P_2, P_4, P_6 inflection points

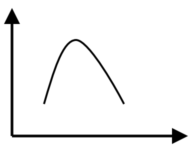
Determination of maximum and minimum

- First derivative test – ශ්‍රිතයක අත්‍යන්ත ලක්ෂ්‍ය නිශ්චය කිරීමට ශ්‍රිතයේ ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය යොදා ගනී.

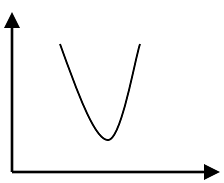
අවශ්‍ය කොන්දේසිය (Necessary condition or first order condition)

$y = f(x)$ ශ්‍රිතයේ $x = x_0$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ශ්‍රිතයේ ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය ශූන්‍ය යම් i.e. $f^1(x_0) = 0$ නම් x_0 අත්‍යන්ත ලක්ෂ්‍යයකි (එය උපරිම හෝ අවම හෝ නතිවර්ථන ලක්ෂ්‍යයක් විය හැකිය.)

ප්‍රමාණවත් කොන්දේසිය (Sufficient condition or second order condition)



- x_0 ලක්ෂ්‍යයෙන් වමේ සිට x_0 ලක්ෂ්‍යය හරහා දකුණට ගමන් කරන විට ව්‍යුත්පන්නයේ [$(f^1(x_0)$] ලකුණ ධන සිට ඍණ දක්වා වෙනස් වේ නම් x_0 ලක්ෂ්‍යය සාපේක්ෂ උපරිමයකි.



- x_0 ලක්ෂ්‍යයෙන් වමේ සිට x_0 ලක්ෂ්‍යය හරහා දකුණට ගමන් කරන විට ව්‍යුත්පන්නයේ [$(f^1(x_0)$] ලකුණ ඍණ සිට ධන දක්වා වෙනස් වේ නම් x_0 ලක්ෂ්‍යය සාපේක්ෂ අවමයකි.

- x_0 ලක්ෂ්‍යයෙන් දෙපස දී ම ලකුණ සමාන වේ නම් x_0 නතිවර්ථන ලක්ෂ්‍යයකි (inflection point) eg. Find maxima or/and minima of $y = f(x) = x^3 – 12x^2 + 36x + 8$

$f'(x) = 3x2 - 24x + 36 = 0$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 6$

$f'(2) = 0 \qquad f'(6) = 0$

එම නිසා $x_1 = 2$ $x_2 = 6$ ලක්ෂ්‍ය අවධි ලක්ෂ්‍ය වේ

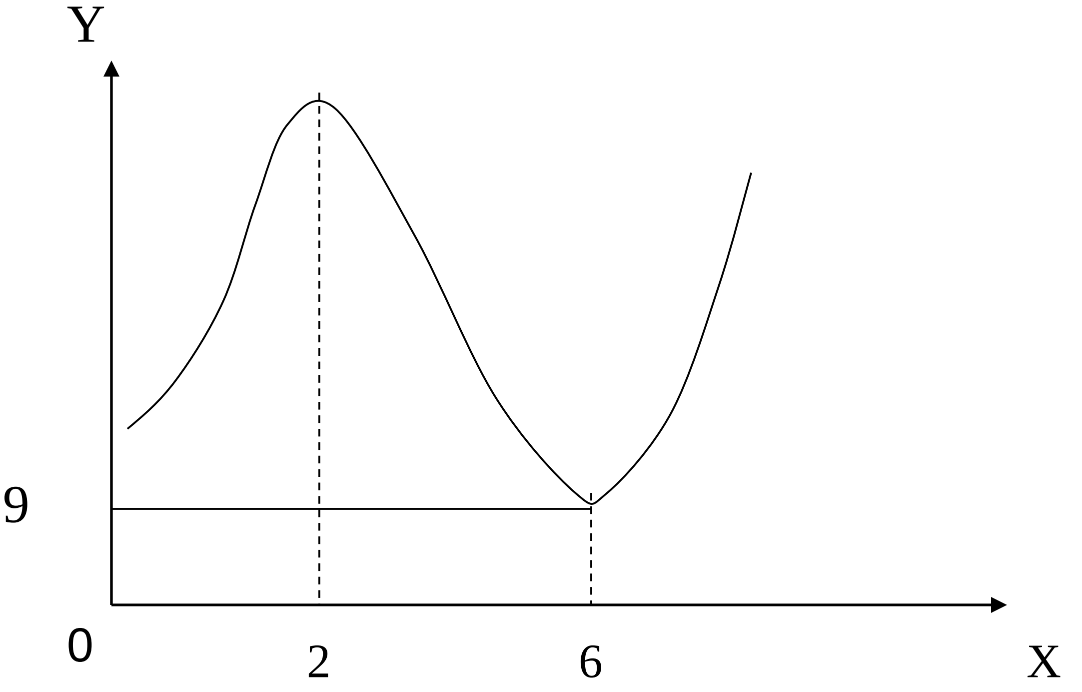
$f(2) = 40$ $f(6) = 8$ මේවා ස්ථාවර අගය (statiobary values) ලෙස හැඳින්වේ

$x = 2$ උපරිමයක් ද අවමයක් ද යන්න නිගමනය කිරීමට $x < 2$ අගයක් ද $x > 2$ අගයක් ද $f'(x)$ ට ආදේශ කළ යුතු ය.

eg. $x = 1$ දී $f'(x) = f'(2) = 15 > 0$

$x = 2$ දී $f'(x) = f'(2) = - 9 < 0$

ලකුණ + සිට - දක්වා වෙනස් වී ඇත. $x = 2$ දී ශ්‍රිතයට ඇත්තේ උපරිමයකි.


Y
9
0
2
6
X

Second Derivative Test

ශ්‍රිතයක අත්‍යන්ත ලක්ෂ්‍ය නිශ්චය කිරීමට ශ්‍රිතයේ දෙවන ව්‍යුත්පන්නය යොදා ගනී

$y = f(x)$ ශ්‍රිතයේ $x = x_0$ දී $f'(x_0) = 0$ නම් x_0 අවධි ලක්ෂ්‍යයකි.

$y = f(x)$ ශ්‍රිතය දිගේ යම් ලක්ෂ්‍යයක් උපරිම ලක්ෂ්‍යය කරා එළඹීමේ දී $dy/dx = +$ ද උපරිම ලක්ෂ්‍යයේ දී $dy/dx = 0$ ද උපරිම ලක්ෂ්‍යයෙන් පසු $dy/dx = -$ ද වේ.

ඒ අනුව උපරිම ලක්ෂ්‍යයක් තුළින් ගමන් කිරීමේ දී ශ්‍රිතයේ බෑවුම වෙනස් වීමේ අනුපාතය d^2y/dx^2 ක්‍රමයෙන් අඩු වේ. උපරිම ලක්ෂ්‍යයේ දී එය සෘණ වේ. එනම්,

$d^2y/dx^2 < 0$ වේ.

ඒ අනුව $y = f(x)$ ශ්‍රිතයේ $x = x_0$ දී $f'(x_0) = 0$ නම් x_0 අවධි ලක්ෂ්‍යයකි.

$f''(x_0) < 0$ නම් x_0 උපරිමයකි.

$y = f(x)$ ශ්‍රිතය දිගේ යම් ලක්ෂ්‍යයක් අවම ලක්ෂ්‍යය කරා එළඹීමේ දී $dy/dx = -$ ද අවම ලක්ෂ්‍යයේ දී $dy/dx = 0$ ද අවම ලක්ෂ්‍යයෙන් පසු $dy/dx = +$ ද වේ.

ඒ අනුව අවම ලක්ෂ්‍යයක් තුළින් ගමන් කිරීමේ දී ශ්‍රිතයේ බෑවුම වෙනස් වීමේ අනුපාතය d^2y/dx^2 ක්‍රමයෙන් වැඩි වේ. අවම ලක්ෂ්‍යයේ දී එය ධන වේ. එනම්,

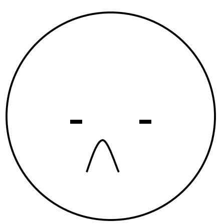
$d^2y/dx^2 > 0$ වේ.

ඒ අනුව $y = f(x)$ ශ්‍රිතයේ $x = x_0$ දී $f\,'(x_0) = 0$ නම් x_0 අවධි ලක්ෂ්‍යයකි.

$f''(x_0) > 0$ නම් x_0 උපරිමයකි.

උපරිම

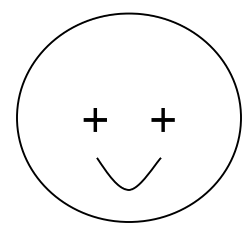
$dy/dx = f\,'(x) = 0$



$d^2y/dx^2 = f''(x) < 0$

අවම

$dy/dx = f\,'(x) = 0$



$d^2y/dx^2 = f''(x) > 0$

eg. $y = f(x) = x^3 – 3x^2 + 2$

First order condition $dy/dx = f'(x) = 0$

$dy/dx = f'(x) = 3x^2 – 6x = 0$

අවධි අගය $x_1 = 2, x_2 = - 0$

Second order conditions

$d^2y/dx^2 \quad = 6x – 6$

$\left. d^2y/dx^2 \right|_{x = 2} \quad = 6 > 0$ එම නිසා $x = 2$ දී ශ්‍රිතයට ඇත්තේ අවමයකි.

$\left. d^2y/dx^2 \right|_{x = 0} \quad = - 6 < 0$ එම නිසා $x = 0$ දී ශ්‍රිතයට ඇත්තේ උපරිමයකි.

Find relative extrema of the following functions

$y = - x^2 + 4x + 91$ $\qquad$ $y = x^5 – 5x^4 \;\; 5x^3 + 10$

$y = ⅓x^3 – 3x^2 + 5x + 3$ $\qquad$ $y = x^5 – 5/2\, x^4 + 17$

If $d^2y/dx^2 = f''(x) = 0$?

මෙවැනි තත්වයක දී

I. x හි අගය x_0 ට කුඩා අගයක සිට ලොකු අගයක් දක්වා වෙනස් වන විට $f''(x)$හි

ලකුණ වෙනස් වන ආකාරය නිරීක්ෂණය කළ යුතු ය. ඒ අනුව,

i ලකුණ + සිට – දක්වා වෙනස් වේ නම් x_0 දී ශ්‍රිතයට ඇත්තේ උපරිමයකි

ii ලකුණ + සිට – දක්වා වෙනස් වේ නම් x_0 දී ශ්‍රිතයට ඇත්තේ අවමයකි

iii ලකුණ වෙනස් නොවේ නම් x_0 නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයකි.

eg. $y = f(x) = x^5 – 5/2x^4 + 17$

First order condition $dy/dx = f'(x) = 0$

$dy/dx = f'(x) = 5x^4 – 10x^3 = 0$

$5x^3 (x - 2) = 0$

අවධි අගය $x = 0, x = 2$

Second order condition

$d^2y/dx^2 = 20x^3 – 30x^2 = 0$

$$\left. d^2y/dx^2 \right|_{x = 2} = 160 – 120 = 40 > 0$$

x = 2 දී ශ්‍රිතයට ඇත්තේ අවමයකි

අවම අගය f(2) = 32 – 40 + 17 = 9

$$\left. d^2y/dx^2 \right|_{x = 0} = 0$$

x_0 දී ශ්‍රිතයට ඇත්තේ උපරිමයක් ද අවමයක් ද නිශ්චය කිරීමට f '(x) ට -1 හා +1 ආදේශ කර ලකුණ වෙනස් වන ආකාරය නිරීක්ෂණය කළ යුතු ය.

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x = -1} = 15 \qquad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x = 1} = -15$$

එම නිසා x_0 දී ශ්‍රිතයට ඇත්තේ උපරිමයකි.

ii ඉහළ සණයේ ව්‍යුත්පන්න ගැනීම

- එලෙස ලැබෙන පළමු වන ශූන්‍ය නොවන ඉහළ සණයේ ව්‍යුත්පන්නයට $x = x_0$ ආදේශ කරන්න.
- ලැබෙන අගය ඔත්තේ නම් x_0 නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයකි
- ඉරට්ට අගයක් නම් x_0 අත්‍යන්ත ලක්ෂ්‍යයකි.
    - ධන ඉරට්ට අගයක් නම් අවමයකි.
    - ඍණ ඉරට්ට අගයක් නම් උපරිමයකි.

ඉහත උදාහරණය

$$d^2y/dx^2 = 20x^3 - 30x^2$$

$$\left. d^2y/dx^2 \right|_{x=0} = 0$$

$$d^3y/dx^3 = 60x^2 - 60x$$

$$\left. d^3y/dx^3 \right|_{x=0} = 0$$

$$d^4x/dx^4 = 120x - 60$$

$$\left. d^4x/dx^4 \right|_{x = 0} = - 60 < 0$$

අගය ඉරට්ට නිසා $x = 0$ අත්‍යන්ත ලක්ෂ්‍යයකි. එය සෘණ නිසා $x = 0$ දී ශ්‍රිතයට ඇත්තේ

උපරිමයකි.

Extreme Values of a Function of Two Variables

$z = f(x, y)$

Condition	Maximum	Minimum
First order or Sufficient	$f_x = f_y = 0$	$f_x = f_y = 0$
Second order or Necessary	$f_{xx}, f_{yy} < 0$ and $f_{xx} f_{yy} > f_{xy}^2$	$f_{xx}, f_{yy} > 0$ and $f_{xx} f_{yy} > f_{xy}^2$

eg. Find the extreme value(s) of $z = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2 + 1$

First order condition is $f_x = 0$ and $f_y = 0$

$$f_x = \partial z/\partial x = 24x^4 + 2y - 6x = 0 \quad \text{———} \quad (1)$$

$$f_y = \partial z/\partial x = 2x + 2y = 0 \quad \text{———} \quad (2)$$

From (2) $y = - x$

Substituting into (1) $24x^2 - 8x = 0$

$$3x^2 - x = 0$$

$$x(3x - 1) = 0$$

$x_1 = ⅓$, $y_1 = - ⅓$

$x_2 = 0$ $y_2 = 0$

For second order condition

$f_{xx} = 48x - 6$ $f_{yy} = 2$ $f_{xy} = 2$ $f_{yx} = 2$

When $x = 0$

$f_{xx} = -6$ $f_{yy} = 2$

- Since the signs of f_{xx} and f_{yy} are opposite, the product of them yield a negative value. Obviously it is less than f_{xy}^2, hence failed the second order condition.
- Opposite signs of f_{xx} and f_{yy} suggests that the function has a saddle point at $x = 0$.

When $x = 1/3$

$f_{xx} = 10$ $f_{yy} = 2$ $f_{xy} = 2$

The product of f_{xx} and $f_{yy} > f_{xy}$, second order condition satisfies for a minimum. Point $x = 1/3$ and $y = -1/3$ is a minimum and minimum value of the function is 23/27.

Economic applications

Profit maximization

ලාභය (Π) = අයභාරය (R) – පිරිවැය (C)

$$\Pi = R - C$$

$$R = f(q) \text{ and } C = f(q)$$

$$\Pi(q) = R(q) - C(q)$$

ලාභ උපරිම වීම සඳහා R(q) හා C(q) අතර වෙනස උපරිම විය යුතුයි

First order condition

$$d\Pi/dq = \Pi' = 0$$

$$\Pi'(q) = R'(q) - C'(q)$$

$$= 0 \text{ if } R'(q) = C'(q)$$

ඒ අනුව ලාභ උපරිම වන නිමැවුමේ දී

$$R'(q) = C'(q)$$

$$MR = MC$$

Second order condition

$d^2\Pi/dq^2 = \Pi''(q) < 0$

$\Pi''(q) = R''(q) - C''(q)$

< 0 if $R''(q) < C''(q)$

මේ අනුව දෙවන කොන්දේසිය තෘප්ත වීමට $R''(q) < C''(q)$ විය යුතු ය.

$R''(q)$ - MR වෙනස් වීමේ අනුපාතය

$C''(q)$ – MC වෙනස් වීමේ අනුපාතය

ඒ අනුව MC = MR වන නිමැවුමේ දී $R''(q) < C''(q)$ වේ නම් ලාභ උපරිම වේ.