Mathematics for Economics - ECON 53035
MA/MSSc in Economics-2020/2021

Prof. W. M. Semasinghe
Department of Economics

MATHEMATICS AND STATISTICS

LERNING OUTCOMES:

By the end of this course unit students will be able to demonstrate skills in mathematical and statistical methods that are highly useful in analyzing problems related to economic theory and practice and understand the uses of basic descriptive and inferential statistics in economic analysis.

COURSE CONTENTS: This course unit consists of two parts:

Part I: Mathematics - Functions and their applications in economics, Calculus and its applications in economics: Differentiation, Partial differentiation, Integration; Matrices; Maxima and Minima; Constrained Optimization with economic applications, Linear programming.

Part II: Statistics - Probability and probability Theory; continuous and discrete variables, continuous and discrete variables distributions, Joint distributions; Moment generating functions; Hypothesis testing and confidence intervals.

ශ්‍රිත (Functions)

❖ ශ්‍රිතයක් යනු විචල්‍ය අතර සම්බන්ධතාව විස්තර කිරීමට යොදා ගන්නා උපක්‍රමයකි.

y යන විචල්‍යයේ අගය x යන තවත් විචල්‍යයක අගය මත රඳා පවතී නම් y විචල්‍යය x විචල්‍යයේ ශ්‍රිතයකි.

$$y = f(x)$$

x විචල්‍ය ගන්නා අගය ආදාන සංඛ්‍යා (input numbers)

y විචල්‍ය ගන්නා අගය ප්‍රතිදාන සංඛ්‍යා (output numbers)

ශ්‍රිතයක එක් එක් ආදාන සංඛ්‍යාව සඳහා එක් ප්‍රතිදාන සංඛ්‍යාවක් පමණක් ගනී.

❖ ශ්‍රිතයක් යනු ‘එක් ආදාන සංඛ්‍යාවකට හරියටම එක් ප්‍රතිදාන සංඛ්‍යාවක් පැවරෙන ලෙස අර්ථ දක්වන ලද නීතියකි’.

ශ්‍රිතයක ආදාන සංඛ්‍යා නිරූපනය කරන විචල්‍ය ***ස්වායත්ත විචල්‍ය*** ලෙස (independent variables) හැඳින්වේ.

ප්‍රතිදාන සංඛ්‍යා නිරූපනය කරන විචල්‍යය ***පරායත්ත විචල්‍යය*** ලෙස (dependent variables) හැඳින්වේ.

$$y = f(x)$$

පරායත්ත විචල්‍ය   ස්වායත්ත විචල්‍ය

ශ්‍රිතයේ වසම: අර්ථ දක්වන ලද නීතිය තෘප්ත කෙරෙන සියලුම ආදාන සංඛ්‍යා කාණ්ඩය ශ්‍රිතයේ වසම (***domain*** of the function) ලෙස හැඳින්වේ.

විශේෂයෙන් සඳහන් කළහොත් හැර හැම විටම ශ්‍රිතයේ වසම තාත්වික සංඛ්‍යාවලින් සමන්විත වේ.

ශ්‍රිතයේ පරාසය: සියලුම ප්‍රතිදාන සංඛ්‍යා කාණ්ඩය ශ්‍රිතයේ පරාසය (***range*** of the function) ලෙස හැඳින්වේ.

ශ්‍රිතීය සම්බන්ධතා සඳහා නිදසුන්

$q = f(p)$ $s = f(y_d)$

$p = f(q)$ $c = f\,(y_d)$

$TC = f(q)$ $TR = f(q)$

F, G, g, h, θ, φ, ψ, Φ, Ψ යනාදී සංකේත ද යොදා ගනී

y හා z, x විචල්‍යයේ ශ්‍රිත නම්

$y = f(x)$ සහ $z = f(x)$

$y = y(x)$ හා $z = z(x)$

e.g. (1) $y = f(x) = 18x - 3x^2$

x ආදාන සංඛ්‍යාව ඕනෑම තාත්වික සංඛ්‍යාවක් වන විට y ප්‍රතිදාන සංඛ්‍යාව ද තාත්වික සංඛ්‍යාවක් වේ. එවිට ශ්‍රිතයේ වසම තාත්වික සංඛ්‍යා කාණ්ඩයකි R

e.g. 2 $$y = \frac{2x+3}{x-1}$$

මෙහි x විචල්‍යය 1 හැර ඕනෑම තාත්වික සංඛ්‍යාවක් වන විට y තාත්වික සංඛ්‍යාවක් වේ. ශ්‍රිතයේ වසම 1 හැර ඕනෑම තාත්වික සංඛ්‍යාවකි R – {1} or $x \neq 1$

e.g. 3. $$y = \frac{6}{x(x+9)}$$

ශ්‍රිතයේ හරය $x \neq 0$ සහ $x \neq -9$ විය යුතු ය.

ශ්‍රිතයේ වසම 0 හා 1 හැර ඕනෑම තාත්වික සංඛ්‍යා කාණ්ඩයකි

පරාසය සොයන්න

1). $y = 2x$

x ආදාන සංඛ්‍යාව ඕනෑම තාත්වික සංඛ්‍යාවක් වන විට y ප්‍රතිදාන සංඛ්‍යාව ද තාත්වික සංඛ්‍යාවක් වේ. ශ්‍රිතයේ පරාසය තාත්වික සංඛ්‍යා කාණ්ඩයකි R

2). $y = x^2$,

ශ්‍රිතයේ වසම ඕනෑම තාත්වික සංඛ්‍යාවක් වන විට පරාසය $y \geq 0$

3). $y = -5x$, $(-1 \leq x \leq 2)$

පරාසය $-10 \leq y \leq 5$

බොහෝ ආර්ථික විද්‍යාත්මක විචල්‍ය ස්වභාවයෙන්ම යම් සීමාවක් තුළ පිහිටි ඍණ නොවන අගය ගනී.

∴ ආර්ථික විද්‍යාත්මක ආකෘතිවල වසම එකී සීමාව තුළ පිහිටයි.

නිදඃ

ආයතනයක මුළු පිරිවැය දෛනික නිෂ්පාදිතයේ (q), C =150 + 7q ආකාරයේ ශ්‍රිතයකි.

ආයතනයේ නිෂ්පාදන නිෂ්පාදන ධාරිතාව දිනකට ඒකක100කි.

පිරිවැය ශ්‍රිතයේ වසම හා පරාසය කුමක් වේ ද?

$$Domain = \{q \mid 0 \le q \le 100\}$$

$$Range = \{C \mid 150 \le C \le 850\}$$

❖ a යනු $f(x)$ ශ්‍රිතයේ x හි යම් නිශ්චිත අගයක් නම් $x = a$ වන විට ශ්‍රිතයේ අගය $f(a)$ ලෙස දක්වයි

e.g. (1) $y = f(x) = \dfrac{x}{7x + 1}$

$f(a) = a/(7a + 1)$

$f(4) = 4/29$

Given,

$f(x) = x^2 + 5x - 6$ Find, $f(3)$ and $f(-4)$

$f(x) = \dfrac{4x^2 - 9x + 17}{x + 7}$ Find, $f(5)$ and $f(-2)$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 11}{x + 4}$ Find, $f(3a)$ and $f(a - 4)$

$f(x) = 1 - 2x;$ Find $f(3)$, $f(-x)$, and $f(x+h)$

Types of Functions

❖ Constant function: පරාසය නියතයකින්/එක් අගයකින් පමණක් සමන්විත ශ්‍රිත

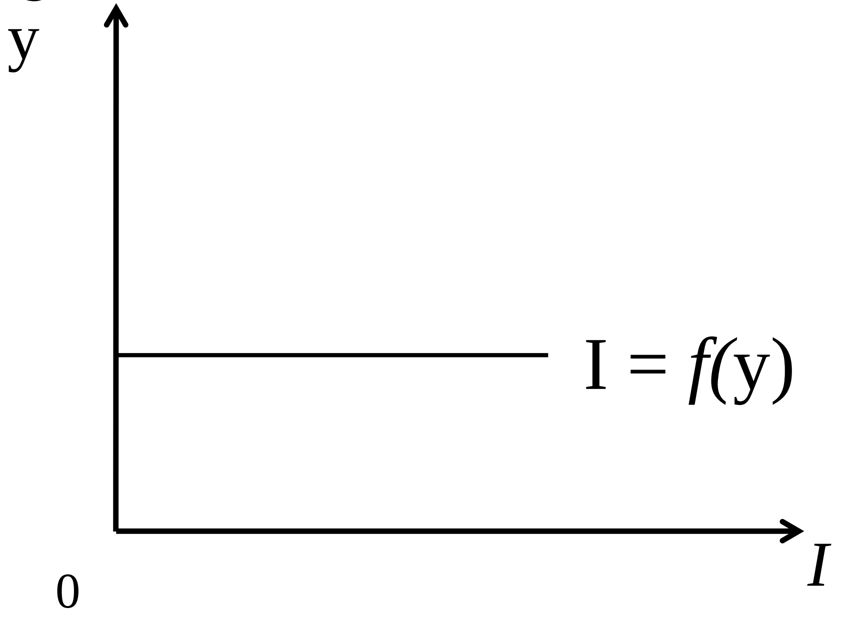
$$y = 7$$

$$f(x) = 10$$

x හි අගය කවරක් වුව ද ශ්‍රිතයේ අගය නොවෙනස්ව පවතී

මෙවැනි ශ්‍රිතයක් ද්වීමාන තලයක තිරස් අක්ෂයට සමාන්තර සරල රේඛාවකි

ජාතික ආදායම් ආකෘතියක ආයෝජන බහිර්ජන්‍ය විචල්‍යයකි.



❖බහු පද ශ්‍රිත (Polynomial Functions)

General form of a Polynomial Functions of Degree n

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

n ධන නිඛිලයකි. $a_0 \ldots\ldots a_n$ නියත පද වන අතර $a_n \neq 0$

e.g. $f(x) = 8x^6 + 3x^4 - x^3 + 5x^2 + 2x + 3$ (polynomial of degree 6)

$f(x) = x^8 + 2x^5 + 3x^4 + 7x^2 + 6x - 5$ (polynomial of degree 8)

බහුපද ශ්‍රිතයේ n නිඛිලයේ අගය මත තීරණය වන විවිධ ස්වරූපයේ බහුපද ශ්‍රිත

when

$n = 0$ $y = a_0$ Constant function

$n = 1$ $y = a_0 + a_1x$ Linear function (polynomial of degree 1)

$n = 2$ $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ Quadratic function

$n = 3$ $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ Cubic function

❖ පරිමේය ශ්‍රිත Rational Functions

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$$

ආකාරයේ ශ්‍රිත පරිමේය ශ්‍රිත වේ. මෙහි g(x) හා h(x) බහුපද ශ්‍රිත වන අතර $h(x) \neq 0$ වේ.

$f(x)$, x හි බහුපද ශ්‍රිත දෙකක අනුපාතයක් වශයෙන් දැක්වේ.

$$f(x)=\frac{3x^2+5)}{(2x-1)}$$

❖සංයුක්ත ශ්‍රිත Composite Function or Function of a Function

$y = g(u)$ හා $u = f(x)$ නම් $y = g[f(x)]$

e.g. (1). If $y = u^2 + 3$ and $u = 2x + 1$ then,

$y = (2x+1)^2 + 3$

e.g. (2). If $y = x^3 - 3x + 5$ and $x = \frac{1}{2}\sqrt{t} + 3$ then,

$y = (\frac{1}{2}\sqrt{t}+3)^3 - 3(\frac{1}{2}\sqrt{t}+3) + 5$

❖Non-algebraic Functions

$$\left.\begin{array}{l} y = b^x \\ y = e^t \end{array}\right\} \text{ ආකාරයේ ඝාතීය ශ්‍රිත සහ}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = log_b x \\ y = ln x \end{array}\right\} \text{ ආකාරයේ ලඝුගණක ශ්‍රිත}$$

Functions of Two or More independent variable

$$z = f(x, y)$$

$$z = ax + by$$

$$v = f(L, K)$$

$$z = a_0 + a_1x + a_2x^2 + b_1y + b_2y^2$$

$$y = a_1x_1 + a_2x2 + a_3x_3 + \ldots.a_nx_n$$

The arithmetic of functions

ශ්‍රිත එකතු කිරීම, අඩුකිරීම, වැඩි කිරීම හා බේදීම මගින් නව ශ්‍රිත ගොඩනැංවිය හැකි ය

f හා g යනු xහි ශ්‍රිත දෙකකි:

i) ඒවායේ එකතුව $f + g$ මගින් දක්වන අතර $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ වශයෙන් අර්ථ දක්වයි.

ii) ඒවායේ අන්තරය $f - g$, මගින් දක්වන අතර $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ වශයෙන් අර්ථ දක්වයි.

iii) ඒවායේ ගුණිතය $f \cdot g$ මගින් දක්වන අතර $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ වශයෙන් අර්ථ දක්වයි.

iv) ඒවායේ ලබ්ධිය f / g මගින් දක්වන අතර $(f / g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ වශයෙන් අර්ථ දක්වයි.

e.g. එක්තරා භාණ්ඩයක ඒකක q ප්‍රමාණයක් නිපදවා අලෙවි කිරීමේ පිරිවැය C(q) ද අයභාරය R(q) ද වේ. එම නිසා භාණ්ඩයේ ලාභ ශ්‍රිතය $\pi(x) = R(q) – C(q)$ වශයෙන් අර්ථ දැක්විය හැකි ය.

Ex. f හා g යනු $f(x) = x^4 + x$ සහ $g(x) = x + 1$ වශයෙන් අර්ථ දක්වන ලද ශ්‍රිත දෙකකි. $f+g$, $f - g$, $f \cdot g$ සහ f/g සොයන්න.

අවකලනය (Differentiation)

ශ්‍රිතයක ස්වායත්ත විචල්‍යයේ ඉතා කුඩා වෙනසකට ප්‍රතිචාර වශයෙන් පරායත්ත විචල්‍යයේ ඇතිවන වෙනස සෙවීම අවශ්‍ය වේ. ඒ සඳහා අවකලනය භාවිත කළ හැකි ය.

දෙනු ලැබූ ශ්‍රිතයක අවකලන සංගුණකය (differential coefficient) හෙවත් ව්‍යුත්පන්නය (derivative) සෙවීමේ ක්‍රියාවලිය අවකලනය (*differentiation)* නම් වේ.

$y = f(x)$ ශ්‍රිතයේ x විචල්‍යය ඉතා කුඩා ප්‍රමාණයකින් වෙනස් වන විට y විචල්‍යයේ ඇතිවන වෙනස $y = f(x)$ ශ්‍රිතයේ x විෂයෙහි y අවකලනය කිරීමෙන් ලැබේ.

$y = f(x)$ ශ්‍රිතයේ x විෂයෙහි yහි අවකලන සංගුණය පහත පරිදි අර්ථ දැක්විය හැකි ය.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

$y = f(x)$ ශ්‍රිතයේ xහි අගය Δx ප්‍රමාණයකින් වැඩි වන විට ශ්‍රිතයේ අගය එනම් y හි අගය සෙවීමට අවශ්‍ය යැයි සිතමු.

$$y = f(x) \qquad (1)$$

x විචල්‍යය Δx ප්‍රමාණයකින් වැඩි වන විට y හි අගය Δy ප්‍රමාණයකින් වැඩි වූයේ යැයි සිතමු.

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \qquad (2)$$

(2) - (1) $$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad (3)$$

(3) $\div \Delta x$ $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

මෙහි $\Delta x \xrightarrow{\text{සීමාව}} 0$ විට $\Delta y/\Delta x$ ආසන්න වන සීමාව x විෂයෙහි y හි අවකලන සංගුණකය (differential coefficient) යි. $\Delta y/\Delta x$ සීමාකාරී අගය දැක්වීමට dy/dx භාවිත කෙරේ.

Rules of Differentiation

u, v හා y යනු x හි ශ්‍රිතයන් ද k යනු නියතයක් ද වන විට

(1) Constant function rule

$y = k$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(k)}{dx} = f'(x) = 0$$

y = 10

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(10)}{dx} = f'(x) = 0$$

(2) Linear function rule

$y = f(x) = kx + 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(kx+2)}{dx} = k$$

y = 9x + 6

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(9x+6)}{dx} = 9$$

(3) Power function rule

y = f(x) = x^n

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$$

e.g. **y =** x^6

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^6)}{dx} = 6x^5$$

Ex. (1) y = $x^{5/2}$

Ex. (2) y = $x^{2/3}$

Ex. (3) y = x^{-3}

Ex. (4) y = $x^{-5/2}$

(4). Generalized power function rule

$y = kx^n$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(kx^n)}{dx} nkx^{n-1}$$

Ex. (1) $y = 2x^4$

Ex. (2) $y = ax^3$

Ex. (3) $y = ax^{n+1}$

Ex. (4) $y = 1/x$

Ex. (5) $y = f(t) = 8t^6$

Rules of differentiation involving two or more functions of the same variable

(5). Sum-difference rule

$$y = [f(x) \pm g(x)]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d[f(x)]}{dx} \pm \frac{d[g(x)]}{dx}$$

Ex. (1) $y = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 18$

Ex. (2) $y = 2x^{1/2} + 6x^{1/3} - 2x^{2/5} + 18$

(6). Chain rule or Function of a function rule

$y = f(u)$ සහ $u = g(x)$, වන විට $y = f[g(x)]$ ශ්‍රිතයක ශ්‍රිතයක් වේ.

Y, u විෂයෙහි අවකලනය කළ හැකි ශ්‍රිතයක් ද u, x විෂයෙහි අවකලනය කළ හැකි ශ්‍රිතයක් ද වන විට $y = f[g(x)]$, x විෂයෙහි අවකලනය කළ හැකි ශ්‍රිතයක් වේ.

මෙවැනි ශ්‍රිතයක dy/dx ලබා ගැනීම දෙආකාරයකට පුළුවන

1). y, x වලින් ප්‍රකාශ කර අවකලනය කිරීම

e.g. $y = u^2+3$ සහ $u = 2x+1$, වන විට $y = (2x+1)^2 + 3 = 4x^2+4x+1$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 8x + 4$$

2). එක් එක් ශ්‍රිතය වෙන වෙනම ස්වායත්ත විචල්‍යය විෂයෙහි අවකලනය කර ***දාම නීතිය*** (chain rule) යොදා ගැනීම

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

ඉහත ශ්‍රිතයේ අවකලන සංගුණකය

$$\frac{dy}{du} = 2u \quad \text{and} \quad \frac{du}{dx} = 2$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 4u = 4(2x+1) = 8x+4$$

e.g. $y = (ax+b)^n$

If we defined $(ax + b) = u$ then $y = u^n$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{du}} = nu^{n-1} \quad \text{and} \quad \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{d(ax+b)}{dx} = a$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = n(ax+b)^{n-1} \times a = an(ax+b)^{n-1}$$

We can express this procedure as rule as follows:

When $y = [f(\mathrm{x})]^n$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$$

Ex. (1) $y = 3(2x + 5)^2$

Assume that $(2x + 5) = u$, then $y = 3u^2$

Ex. (2) $y = (3 - 4x^2)^{3/2}$

(7). Product rule

$$y = [f(x).g(x)]$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\frac{d[dg(x)]}{dx} + g(x)\frac{d[f(x)]}{dx}$$

$$f(x) = u \; and \; g(x) = v$$

$$y = uv$$

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

eg. $y = (2x^3 - 3x)(x^2 + 5)$

Defining $(2x^3 - 3x) = u$ and $(x^2 + 5) = v$

$$\frac{dy}{dx} = (2x^3 - 3x)\frac{d(x^2+5)}{dx} + (x^2+5)\frac{d(2x^3-3x)}{dx}$$

$$= (2x^3 - 3x)(2x) + (x^2 + 5)(6x^2 - 3)$$

If u, v and w are functions of variable x,

$$y = f(u,v,w)$$

$$\frac{dy}{dx} = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$$

Find derivative of the function $y = x^2 (x^2 + 1)(x + 2)$

(8). Quotient rule

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)\frac{d[f(x)]}{dx} - f(x)\frac{d[g(x)]}{dx}}{[g(x)]^2}$$

Defining f f(x) = u g(x) = v

$$y = \frac{u}{v}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{d(u)}{dx} - u\frac{d(v)}{dx}}{(v)^2}$$

$$y = \frac{(2x-3)}{(x+1)}$$

If $(2x - 3)$ = u and $(x + 1)$ = v

When $y = 1/f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$$

Prove this!

eg. $y = 1/(x^2+1)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

11. Log-function rule

විචල්‍යයක් තවත් විචල්‍යයක ලඝුගණකයේ ශ්‍රිතයක් වශයෙන් ප්‍රකාශ කෙරෙන ශ්‍රිතයක් ලඝු ශ්‍රිතයක් (*Log function or Logarithmic function*) ලෙස හැඳින්වේ.

$$y = \log_b x$$

පෙර දී දැක් වූ පරිදි කලනයේ දී ලඝුගණකයේ පාදය වශයෙන් ගන්නේ e ය.

- e පාදයට ලඝු *natural logarithm* ලෙස හඳුන්වන අතර එය $\log_e$ හෝ ln මගින් සංකේතවත් කරයි.

$y = \log_e 2x$ හෝ $y = \ln 2x$

e.g. (1). $y = \ln x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

e.g.(2) $y = k(\ln x)$

$$\frac{dy}{dx} = k\frac{d(\ln x)}{dx} = k\frac{1}{x} = \frac{k}{x}$$

e.g.(3) If $y = \ln u$ and $u = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx}$$

e.g.(4) $y = \ln f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

Ex. (1) $y = \ln (3x^2 + 5)$

Ex.(2) $y = x^3 \ln x^2$

Log of a product

$\ln(uv) = \ln u + \ln v$

$\mathrm{Ln}[(x^3+2)(x^2+3)] = ?$

Log of a quotient

$\ln(u/v) = \ln u - \ln v$

$\ln[x^4/(3x - 4)^2] = \ln x^4 - \ln(3x-4)^2 = 4 \ln x - 2 \ln(3x-4)$

$dy/dx = ?$

10. Exponential function rule

බහුපද ශ්‍රිතයක ස්වායත්ත විචල්‍යයේ බලය 'ඝාතය' (exponent) ලෙස හඳුන්වන අතර එය නියතයකි.

$$e.g.\ y = 2x^3 + 4x^2 + 5$$

ස්වායත්ත විචල්‍යය ඝාතයක් වශයෙන් පිහිටන ශ්‍රිතයක් 'ඝාතීය ශ්‍රිතයක්' (Exponential function) ලෙස හඳුන්වයි,

$$e.g.\ y = f(x) = b^x \qquad (b>1)$$

මෙහි y හා x පිළිවෙලින් පරායත්ත හා ස්වායත්ත විචල්‍ය වන අතර b මගින් දැක්වෙන්නේ ඝාතයේ පාදය (base) යි.

කලනයේ දී ගණිතමය ක්‍රියාකාරකම්වල පහසුව සඳහා e නම් වන අපරිමේය සංඛ්‍යාව (e =2.71828…) ඝාතයේ පාදය ලෙස යොදා ගනී.

$$eg.\ y = e^x \qquad y = e^{3x} \qquad y = Ae^{rx}$$

e.g. (1) $y = e^x$

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

e.g. (2) $y = e^u$ හා $u = f(x)$ නම්

$$\frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx} = e^u f'(x)$$

e.g. (3) $y = e^{(3x + 2)}$

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{(3x + 2)}$$

Higher Order Derivatives

ශ්‍රිතයක ව්‍යුත්පන්නය ශ්‍රිතයක් වන විට ව්‍යුත්පන්නයට ද ව්‍යුත්පන්නයක් ඇත.

y = *f*(x) හි ව්‍යුත්පන්නය එහි ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය (first derivative) යි. එය dy/dx හෝ $f'(x)$ ලෙස දක්වයි.

$f'(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය d^2y/dx^2 හෝ $f''(x)$ ලෙස දක්වයි. එය *f*(x) හි දෙවන ව්‍යුත්පන්නයයි.

$y = f(x)$ නම්

1st derivative: $$f'(x) = \frac{d(y)}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

2nd derivative: $$f''(x) = \frac{d(dy/dx)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

3rd derivative: $$f'''(x) = \frac{d(d^2y/dx^2)}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$$

nth derivative: $$f^n(x) = \frac{d(d^{n-1}y/dx^{n-1})}{dx} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

$e.g.\ \ y = x^4 + 3x^2 - 2x + 7$

1st derivative: $$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 4x^3 + 6x - 2$$

2nd derivative: $$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 + 6$$

3rd derivative: $$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = 24x$$

Find

$i.\quad y = x\sqrt{1-2x}$ 2nd

$ii.\quad y = \dfrac{3x-1}{x+2}$ 3rd

iii. $y = 2x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 6x - 2$ 3rd

iv. $y = x^3 + e^x$ 4th

ආංශික අවකලනය **Partial differentiation**

මේ දක්වා සලකා බලන ලද්දේ පොදුවේ $f(x)$ වශයෙන් දැක් වූ තනි ස්වායත්ත විචල්‍යයක් සහිත ශ්‍රිත පිළිබඳව ය. එහෙත් බොහෝ විට ස්වායත්ත විචල්‍ය එකකට වැඩි සංඛ්‍යාවක් පවත්නා අවස්ථා පිළිබඳව සලකා බැලීමට සිදුවේ.

x හා y යන ස්වායත්ත විචල්‍ය දෙක සහිත ශ්‍රිතයක්

$z = f(x, y)$ ලෙස දැක්විය හැකිය. ‘පරායත්ත විචල්‍යයය’ y යනු $x_1, x_2, \ldots x_n$ නම් වූ ස්වායත්ත විචල්‍ය n සංඛ්‍යාවක ශ්‍රිතයක් නම්

$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ලෙස දැක්විය හැකිය.

මෙවැනි බහු විචල්‍ය ශ්‍රිතයක, අනෙකුත් විචල්‍ය නොවෙනස්ව තිබිය දී එක් ස්වායත්ත විචල්‍යයක් ඉතා කුඩා ප්‍රමාණයකින් වෙනස් වන විට ශ්‍රිතයේ අගය සෙවීමට අවශ්‍ය වේ. මේ සඳහා ***ආංශික අවකලනය*** නම් ශිල්පීය ක්‍රමය භාවිත කරයි

ඒ අනුව $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ නම් බහු විචල්‍ය ශ්‍රිතයක අනෙකුත් විචල්‍ය ස්ථාවරව තිබිය දී එක් ස්වායත්ත විචල්‍යයක වෙනස් වීමට අනුරූපව y වෙනස් වන අනුපාතය ආංශික අවකලයෙන් (partial derivative) මැන දක්වයි.

$z = f(x, y)$ යන ශ්‍රිතයේ x විෂයෙහි z හි ආංශික අවකලය ගැනීමේදී y නියතයක් ලෙස සළකන අතර එය $\partial z/\partial x$ හෝ f_x මගින් නිරූපනය කරයි.

y විෂයෙහි z හි ආංශික අවකලය ගැනීමේදී x නියතයක් ලෙස සළකන අතර එය $\partial z/\partial y$ හෝ f_y මගින් නිරූපනය කරයි.

Ex. (1) Find f_1 and f_2 $y = f(x_1,x_2) = 3x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2$

Ex. (2). Find f_x and f_y $z = f(x,y) = (x^2 - 7y)(x - 2)$

Ex. (3). If $f(x,y) = (2x - 3y)/(x + y)$, find f_x and f_y

අභ්‍යාස (1) පහත දැක්වෙන ශ්‍රිතවල ආංශික අවකල (f_x හා f_y) අගයන්න.

i. $z = \ln(x^2 + y^2)$

ii. $z = (x + y)\, e^{(x + y)}$

iii. $z = 3x^2y + 4xy^2 + 6xy$

(2) පාරිභෝජකයකුගේ උපේක්ෂා වක්‍රයේ ආකාරය $U = U(x_1, x_2) = (x_1 + 2)^2 (x_2 + 3)^2$ මෙහි U මුළු උපයෝගිතාව ද x_1 හා x_2 භාණ්ඩ දෙකෙහි ප්‍රමාණ ද දක්වයි.

i. භාණ්ඩ දෙකෙහි ආන්තික උපයෝගිතා ශ්‍රිත ව්‍යුත්පන්න කරන්න.

ii. භාණ්ඩ දෙකෙන් ඒකක 3 බැගින් පරිභෝජනය කරන්නේ නම් පළමු භාණ්ඩයේ ආන්තික උපයෝගිතාව ගණනය කරන්න.

(3) $V = AL^{\alpha}K^{\beta}$ යන නිෂ්පාදන ශ්‍රිතයේ L හා K යනු ශ්‍රමය හා ප්‍රාග්ධනය ද v යනු නිමැවුම ද වේ. ශ්‍රමයේ හා ප්‍රාග්ධනයේ ආන්තික ඵලදාව ගණනය කරන්න.

(4) The cost function of a firm is given by $C = 2x^2 + x - 5$. Find (i) the average cost (ii) the marginal cost, when $x = 4$

(5) The total revenue received from the sale of x units of a product is given by $R(x) = 12x + 2x^2 + 6$.

Find (i) the average revenue

(ii) the marginal revenue

(iii) marginal revenue at $x = 50$

(iv) the actual revenue from selling 51st item

(6) The demand function of a product for a manufacturer is $p(x) = ax + b$

He knows that he can sell 1250 units when the price is Rs.5 per unit and he can sell 1500 units at a price of Rs.4 per unit.

Find the total, average and marginal revenue functions.

Also find the price per unit when the marginal revenue is zero.

Partial Derivatives of Higher Order

- Higher partial derivatives are obtained in the same way as higher derivatives.

- For the function z = *f*(x, y), there are 4 second order partial derivatives:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{(x)x} = f_{xx} = \frac{\partial(\partial z/\partial x)}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{(y)x} = f_{yx} = \frac{\partial(\partial z/\partial x)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{(y)y} = f_{yy} = \frac{\partial(\partial z/\partial y)}{\partial y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{(x)y} = f_{xy} = \frac{\partial(\partial z/\partial y)}{\partial x}$$

Cross partial derivatives

e.g. $z = 4x^6 - 3x^2y^2 + 5y^4$

$f_x = 24x^5 - 6xy^2$

$f_y = -6x^2y + 20y^3$

$f_{xx} = 120x^4 - 6y^2$

$f_{yy} = -6x^2 - 60y^2$

$f_{xy} = -12xy$

$f_{yx} = -12xy$

$f_{xy} = f_{yx}$

Ex. $z = x^2e^{-y}$

Find the four second order partial derivatives for each of the following function:

$$z = 7x \ln(1 + y)$$

$$z = (2x + 5y)(7x - 3y)$$

$$z = e^{4x - 7y}$$

(1) Find the four second order partial derivatives for each of the following function

i. $z = (2x + 5y)(7x - 3y)$

ii. $z = e^{4x - 7y}$

(2) $f(x) = 7x \ln(1 + y)$ යන ශ්‍රිතයේ

i. පළමු වන හා දෙවන ආංශික අවකල අගයන්න

ii. $f_{xy} = f_{yx}$ බව පෙන්වන්න

(3) $V = 20L^{½}K^{½}$ යන නිෂ්පාදන ශ්‍රිතයේ L හා K යනු පිළිවෙලින් ශ්‍රමය හා ප්‍රාග්ධනය වේ. එක් එක් සාධකය හීනවන ආන්තික ඵල පෙන්වන්නේ දැයි පරීක්ෂා කරන්න.

ප්‍රශස්තකරණය Optimization

පවත්නා විකල්ප අතුරින් ප්‍රශස්ථම විකල්පය තේරීම ප්‍රශස්තකරණයයි.

ප්‍රශස්ථකරණය

උපරිමකරණය Maximization

- ලාභ
- උපයෝගිතාව
- වර්ධන අනුපාතිකය
- අලෙවිය etc.

අවමකරණය Minimization

- නිෂ්පාදන පිරිවැය
- අවධානම etc.

$$y = f(x)$$

මෙම ශ්‍රිතයේ අරමුණ *y* උපරිම වන *x* අගය සෙවීම නම් මෙය අරමුණු ශ්‍රිතය (objective function) ලෙස හඳුන්වයි. එය උපරිමකරණයක් හෝ අවමකරණයක් විය හැකිය.

x – ප්‍රවරණ විචල්‍ය (choice variable)

- තීරණ විචල්‍ය (decision variable)

- ප්‍රතිපත්ති විචල්‍ය (policy variable) යන නම්වලින් ද හඳුන්වයි. y උපරිම/අවම වීම සඳහා ගත යුතු අගය දක්වයි.

ව්‍යාරික ආයතනයක් ලාභ උපරිම කිරීමට අපේක්ෂා කරන්නේ යයි සිතමු. ආයතනයේ ලාභ උපරිම වන්නේ අයභාරය (R) හා පිරිවැය (C) අතර වෙනස උපරිම වන නිමැවුමේ (Q) දී ය. තාක්ෂණය හා වෙළෙඳපොල ඉල්ලුම දෙනු ලැබ ඇති විට R හා C යන දෙකම Q හි ශ්‍රිතයකි. ඒ අනුව

$$\Pi = R(Q) - C(Q)$$

ආයතනයේ අරමුණ එනම් ප්‍රශස්ථ කළ යුත්තේ කුමක් ද යන්න Π මගින් ප්‍රකාශ කරන හෙයින් මේ ශ්‍රිතය ප්‍රශස්ථකරණයේ අරමුණු ශ්‍රිතයයි. Q ප්‍රවරණ විචල්‍යයයි. ඒ අනුව ප්‍රශස්ථකරණ ගැටළුව වන්නේ Π උපරිම වන Q සෙවීමයි.

ප්‍රස්ථාරිකව ශ්‍රිතයක උපරිම හා අවම ලක්ෂ්‍ය නිශ්චය කිරීම

❖ ප්‍රස්ථාරයක් මත යම් ලක්ෂ්‍යයක සිරස් ඛණ්ඩය ඒ දෙපස ඇති අනෙක් ලක්ෂ්‍යවලට අදාල සිරස් ඛණ්ඩවලට වඩා වැඩි උසකින් යුක්ත නම් එය සාපේක්ෂ උපරිමයකි (Reletive maximum)

(ආසන්නම ඒවාට සාපේක්ෂව)

❖ ප්‍රස්ථාරයක් මත යම් ලක්ෂ්‍යයක සිරස් ඛණ්ඩය ඒ දෙපස ඇති අනෙක් ලක්ෂ්‍යවලට අදාල සිරස් ඛණ්ඩවලට වඩා උසින් අඩු නම් එය සාපේක්ෂ අවමයකි (Reletive minimum)

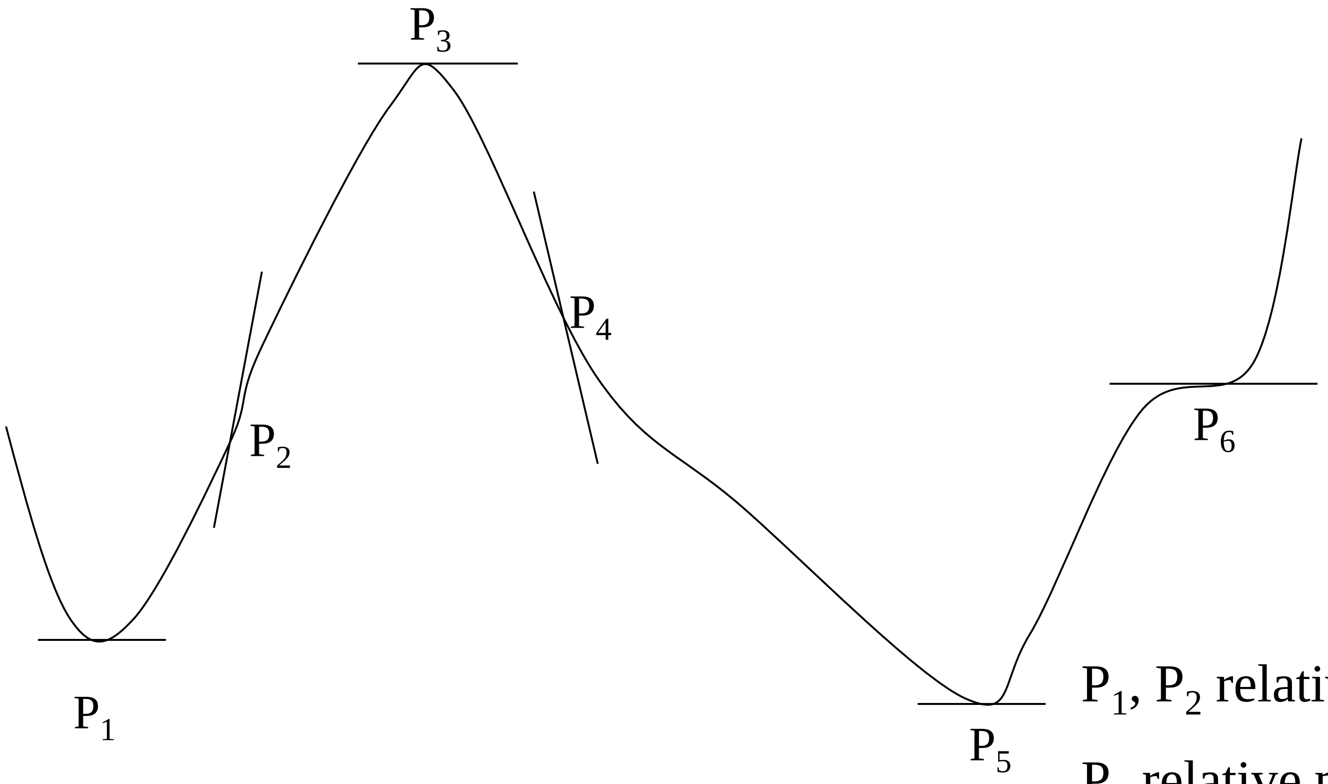
(ආසන්නම ඒවාට සාපේක්ෂව)

❖ ශ්‍රිතයක උපරිම හෝ අවම හෝ ලක්ෂ්‍ය අත්‍යන්ත ලක්ෂ්‍ය (Relative or local extremum) වේ. මේ ලක්ෂ්‍යයකට අඳින ස්පර්ශකය තිරස් අක්ෂයට සමාන්තරව පිහිටන නිසා එහි බෑවුම ශූන්‍ය වේ. මෙවැනි ලක්ෂ්‍යයකට අදාලව ශ්‍රිතයේ ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය ශූන්‍ය වේ.

❖ යම් ලක්ෂ්‍යයකට අඳින ස්පර්ශකය වක්‍රය හරහා ගමන් කරයි නම් එම ලක්ෂ්‍යය නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයක් (Inflection point) ලෙස හඳුන්වයි. එම ලක්ෂ්‍යවල දී ශ්‍රිතයේ ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය ශූන්‍ය හෝ ධන හෝ සෘණ හෝ විය හැකිය. දෙවන ව්‍යුත්පන්නය අත්‍යවශ්‍යයෙන් ම ශූන්‍ය හෝ අනිශ්චිත හෝ වේ.

❖ ශ්‍රිතයක ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය ශූන්‍ය හෝ නිශ්චය කළ නොහැකි ලක්ෂ්‍ය අවධි ලක්ෂ්‍ය (Critical points) ලෙස හැඳින්වේ.

❖ මේ අනුව සැම අවධි ලක්ෂ්‍යයක්ම උපරිමයක්/අවමයක් නොවූව ද උපරිමයක් හෝ අවමයක් පැවතිය හැක්කේ අවධි ලක්ෂ්‍යයක දී පමණකි.



P_1, P_2 relative minimum

P_3 relative maximum

P_2, P_4, P_6 inflection points

Determination of maximum and minimum

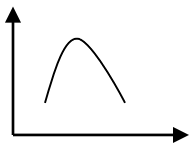
- ❖ First derivative test – ශ්‍රිතයක අත්‍යන්ත ලක්ෂ්‍ය නිශ්චය කිර’මට ශ්‍රිතයේ ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය යොදා ගනී.

අවශ්‍ය කොන්දේසිය (Necessary condition or first order condition)

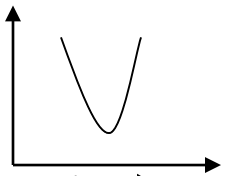
$y = f(x)$ ශ්‍රිතයේ $x = x_0$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ශ්‍රිතයේ ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය ශූන්‍ය වේ නම් i.e. $f'(x_0) = 0$ නම් x_0 අවධි ලක්ෂ්‍යයකි. (එය උපරිම හෝ අවම හෝ නතිවර්ථන ලක්ෂ්‍යයක් විය හැකිය.)

ප්‍රමාණවත් කොන්දේසිය (Sufficient condition or second order condition)

- ❖ x_0 ලක්ෂ්‍යයෙන් වමේ සිට x_0 ලක්ෂ්‍යය හරහා දකුණට ගමන් කරන විට ව්‍යුත්පන්නයේ $[(f'(x_0)]$ ලකුණ ධන සිට ඍණ දක්වා වෙනස් වේ නම් x_0 ලක්ෂ්‍යය සාපේක්ෂ උපරිමයකි.



- ❖ x_0 ලක්ෂ්‍යයෙන් වමේ සිට x_0 ලක්ෂ්‍යය හරහා දකුණට ගමන් කරන විට ව්‍යුත්පන්නයේ $[(f'(x_0)]$ ලකුණ ඍණ සිට ධන දක්වා වෙනස් වේ නම් x_0 ලක්ෂ්‍යය සාපේක්ෂ අවමයකි.



- ❖ x_0 ලක්ෂ්‍යයෙන් දෙපස දී ම ලකුණ සමාන වේ නම් x_0 නතිවර්ථන ලක්ෂ්‍යයකි (inflection point) ex. Find maxima or/and minima of $y = f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 8$

$$y = f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 8$$

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{and} \quad x = 6$$

$$f'(2) = 0 \qquad f'(6) = 0$$

එම නිසා $x_1 = 2$ $x_2 = 6$ ලක්ෂ්‍ය අවධි ලක්ෂ්‍ය වේ

$f(2) = 40$ $f(6) = 8$ මේවා stationary values ලෙස හැඳින්වේ

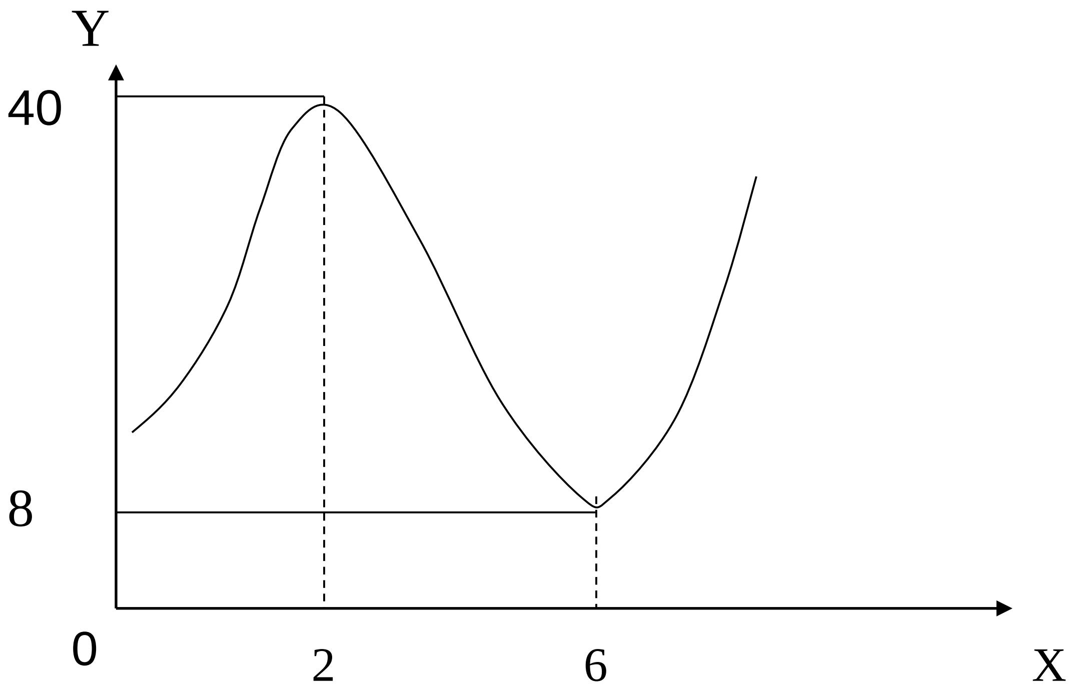
අවධි ලක්ෂ්‍ය (2, 40) and (6, 8)

$x = 2$ උපරිමයක් ද අවමයක් ද යන්න නිගමනය කිරීමට $x < 2$ අගයක් ද $x > 2$ අගයක් ද $f'(x)$ ට ආදේශ කළ යුතු ය.

At $x = 1$, $f'(x) = f'(1) = 15 > 0$

At $x = 3$, $f'(x) = f'(3) = -9 < 0$

ලකුණ + සිට - දක්වා වෙනස් වී ඇත. $x = 2$ දී ශ්‍රිතයට ඇත්තේ උපරිමයකි.



What about X = 6?

Second Derivative Test

ශ්‍රිතයක අත්‍යන්ත ලක්ෂ්‍ය නිශ්චය කිරීමට ශ්‍රිතයේ දෙවන ව්‍යුත්පන්නය යොදා ගනී

$y = f(x)$ ශ්‍රිතයේ $x = x_0$ දී $f'(x_0) = 0$ නම් x_0 අවධි ලක්ෂ්‍යයකි.

$y = f(x)$ ශ්‍රිතය දිගේ යම් ලක්ෂ්‍යයක් උපරිම ලක්ෂ්‍යය කරා එළඹීමේ දී $dy/dx = +$ ද උපරිම ලක්ෂ්‍යයේ දී $dy/dx = 0$ ද උපරිම ලක්ෂ්‍යයෙන් පසු $dy/dx = -$ ද වේ.

ඒ අනුව උපරිම ලක්ෂ්‍යයක් තුළින් ගමන් කිරීමේ දී ශ්‍රිතයේ බෑවුම වෙනස් වීමේ අනුපාතය d^2y/dx^2 ක්‍රමයෙන් අඩු වේ. උපරිම ලක්ෂ්‍යයේ දී එය සෘණ වේ. එනම් $d^2y/dx^2 < 0$ වේ.

ඒ අනුව $y = f(x)$ ශ්‍රිතයේ $x = x_0$ දී $f'(x_0) = 0$ නම් x_0 අවධි ලක්ෂ්‍යයකි.

$f''(x_0) < 0$ නම් x_0 උපරිමයකි.

$y = f(x)$ ශ්‍රිතය දිගේ යම් ලක්ෂ්‍යයක් අවම ලක්ෂ්‍යය කරා එළඹීමේ දී $dy/dx = -$ ද අවම ලක්ෂ්‍යයේ දී $dy/dx = 0$ ද අවම ලක්ෂ්‍යයෙන් පසු $dy/dx = +$ ද වේ.

ඒ අනුව අවම ලක්ෂ්‍යයක් තුළින් ගමන් කිරීමේ දී ශ්‍රිතයේ බෑවුම වෙනස් වීමේ අනුපාතය d^2y/dx^2 ක්‍රමයෙන් වැඩි වේ. අවම ලක්ෂ්‍යයේ දී එය ධන වේ. එනම්ල $d^2y/dx^2 > 0$ වේ.

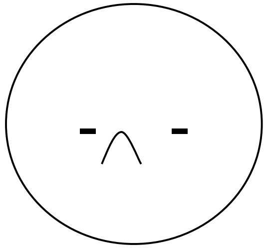
ඒ අනුව $y = f(x)$ ශ්‍රිතයේ $x = x_0$ දී $f'(x_0) = 0$ නම් x_0 අවධි ලක්ෂ්‍යයකි.

$f''(x_0) > 0$ නම් x_0 උපරිමයකි.

උපරිම

$dy/dx = f'(x) = 0$

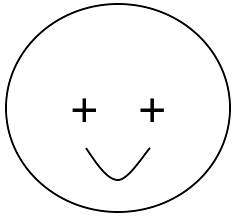
$d^2y/dx^2 = f''(x) < 0$



අවම

$dy/dx = f'(x) = 0$

$d^2y/dx^2 = f''(x) > 0$



Ex. $\boldsymbol{y = f(x) = x^3 - 3x2 + 2}$

First order condition $dy/dx = f'(x) = 0$

$dy/dx = f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$

Critical values $x_1 = 2, \quad x_2 = 0$

Second order conditions

$d^2y/dx^2 = 6x - 6$

$\left. d^2y/dx^2 \right|_{x = 2} = 6 > 0$

$\therefore$ function has a minimum at $x = 2$

$\left. d^2y/dx^2 \right|_{x = 0} = -6 < 0$

$\therefore$ function has a maximum at $x = 0$

Find relative extrema of the following functions

$y = - x^2 + 4x + 91$

$y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 3$

$y = 2x^3 - 15x^2 - 216x + 25$

If $d^2y/dx^2 = f''(x) = 0$?

මෙවැනි තත්වයක දී

(1). x හි අගය x_0 ට කුඩා අගයක සිට ලොකු අගයක් දක්වා වෙනස් වන විට $f''(x)$හි

ලකුණ වෙනස් වන ආකාරය නිරීක්ෂණය කළ යුතු ය. ඒ අනුව,

i ලකුණ + සිට - දක්වා වෙනස් වේ නම් x_0 දී ශ්‍රිතයට ඇත්තේ උපරිමයකි

ii ලකුණ – සිට + දක්වා වෙනස් වේ නම් x_0 දී ශ්‍රිතයට ඇත්තේ අවමයකි

iii ලකුණ වෙනස් නොවේ නම් x_0 නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයකි.

Example $$y = f(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + 17$$

First order condition $dy/dx = f'(x) = 0$

$$dy/dx = f'(x) = 5x^4 - 10x^3 = 0$$

$$5x^3(x - 2) = 0$$

අවධි අගය $x = 0, \quad x = 2$

Second order condition

$$d^2y/dx^2 = 20x^3 - 30x^2 = 0$$

$$d^2y/dx^2\Big|_{x=2} = 160 - 120 = 40 > 0$$

$x = 2$ දී ශ්‍රිතයට ඇත්තේ අවමයකි

අවම අගය $f(2) = 32 - 40 + 17 = 9$

$$d^2y/dx^2\Big|_{x=0} = 0$$

i. x_0 දී ශ්‍රිතයට ඇත්තේ උපරිමයක් ද අවමයක් ද නිශ්චය කිරීමට $f'(x)$ ට -1 හා +1 ආදේශ කර ලකුණ වෙනස් වන ආකාරය නිරීක්ෂණය කළ යුතු ය.

$$dy/dx\Big|_{x=-1} = 15$$

$$dy/dx\Big|_{x=1} = -15$$

ව්‍යුත්පන්නයේ ලකුණ ධන සිට ඍණට මාරු වන නිසා x_0 දී ශ්‍රිතයට ඇත්තේ උපරිමයකි.

ii. ඉහළ සෘණයේ ව්‍යුත්පන්න ගැනීම

- එලෙස ලැබෙන පළමු වන ශූන්‍ය නොවන ඉහළ සෘණයේ ව්‍යුත්පන්නයට $x = x_0$ ආදේශ කරන්න.

- ලැබෙන අගය ඔත්තේ නම් x_0 නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයකි

- ඉරට්ට අගයක් නම් x_0 අත්‍යන්ත ලක්ෂ්‍යයකි.

  - ධන ඉරට්ට අගයක් නම් අවමයකි.

  - සෘණ ඉරට්ට අගයක් නම් උපරිමයකි.

ඉහත උදාහරණය

$$d^2y/dx^2 = 20x^3 - 30x^2$$

$$d^2y/dx^2\Big|_{x=0} = 0$$

$$d^3y/dx^3 = 60x^2 - 60x$$

$$d^3y/dx^3\Big|_{x=0} = 0$$

$$d^4x/dx^4 = 120x - 60$$

$$d^4x/dx^4\Big|_{x=0} = -60 < 0$$

අගය ඉරට්ට නිසා x = 0 අත්‍යන්ත ලක්ෂ්‍යයකි. එය සෘණ නිසා x =0 දී ශ්‍රිතයට ඇත්තේ උපරිමයකි.

Extreme Values of a Function of Two Variables

$z = f(x, y)$

Condition	Maximum	Minimum
First order or Sufficient	$f_x = f_y = 0$	$f_x = f_y = 0$
Second order or Necessary	$f_{xx}, f_{yy} < 0$ and $f_{xx} f_{yy} > f_{xy}^2$	$f_{xx}, f_{yy} > 0$ and $f_{xx} f_{yy} > f_{xy}^2$

(1). The total cost of producing a given commodity is

$TC = \frac{1}{4} x^2 + 30x + 25$ and the price of the commodity is

$P = 60 - \frac{1}{2} x$.

Find the level of output which yield the maximum profit

(2). Cost function of a perfectly competitive firm is

$$TC = 1/3\, q^3 - 5q^2 + 30q + 10$$

If price p = 6, find the profit maximizing output level.

e.g. Find the extreme value(s) of $z = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2 + 1$

First order condition is $f_x = 0$ and $f_y = 0$

$f_x = \partial z/\partial x = 24x^4 + 2y - 6x = 0$ ——— (1)

$f_y = \partial z/\partial x = 2x + 2y = 0$ ——— (2)

From (2) $y = - x$

Substituting into (1) $24x^2 - 8x = 0$

$3x^2 - x = 0$

$x(3x - 1) = 0$

$x_1 = ⅓$, $y_1 = - ⅓$

$x_2 = 0$ $y_2 = 0$

For second order condition

$f_{xx} = 48x - 6$ $f_{yy} = 2$ $f_{xy} = 2$ $f_{yx} = 2$

When $x = 0$

$f_{xx} = -6$ $f_{yy} = 2$

- Since the signs of f_{xx} and f_{yy} are opposite, the product of them yield a negative value. Obviously it is less than f_{xy}^2, hence failed the second order condition.
- Opposite signs of f_{xx} and f_{yy} suggests that the function has a saddle point at $x = 0$.

When $x = 1/3$

$f_{xx} = 10$ $f_{yy} = 2$ $f_{xy} = 2$

The product of f_{xx} and $f_{yy} > f^2_{xy}$, second order condition satisfies for a minimum. Point $x = 1/3$ and $y = -1/3$ is a minimum, and minimum value of the function is 23/27.

Economic applications

Profit maximization

Profit (Π) = Total Revenue (R) – Total Cost (C)

$$\Pi = R - C$$

$$R = f(q) \quad \text{and} \quad C = f(q)$$

$$\Pi(q) = R(q) - C(q)$$

For profit maximization, the difference between R(q) and C(q) should be maximized.

First order condition

$$d\Pi/dq = \Pi' = 0$$

$$\Pi'(q) = R'(q) - C'(q)$$

$$= 0 \text{ iff } R'(q) = C'(q)$$

Thus, at the output level which yield maximum profit,

$$R'(q) = C'(q)$$

$$MR = MC$$

This is the first order condition for profit maximization.

Second order condition

$$d^2\Pi/dq^2 = \Pi''(q) < 0$$

$$\Pi''(q) = R''(q) - C''(q)$$

$$< 0 \text{ iff } R''(q) < C''(q)$$

Thus, to satisfy the second order condition $R''(q) < C''(q)$.

$R''(q)$ = the rate of change of MR

$C''(q)$ – the rate of change of MC

At the output level which MC = MR, and $R''(q) < C''(q)$ profit is maximized.

The demand and cost functions of a firm is given respectively as P = 32 – Q and C = 21Q + 24.

i. Find the output level that maximize the total revenue (TR).

ii. Find the output level that maximize the profit (Π).

i. TR = 32Q – Q2

$$\frac{dTR}{dQ} = 32 - 2Q = 0$$

$$\therefore \qquad Q = 16$$

For the second order condition,

$$\frac{d^2TR}{dQ^2} = -2 < 0$$

$\therefore$ Q =16 gives a relative maximum

TR = 32Q - Q^2 = 256

ii. $\Pi = 32Q – Q^2 - 21Q – 24$

$= - Q^2 + 11Q - 24$

$$\frac{d\Pi}{dQ} = -2Q + 11 = 0$$

$$Q = 5.5$$

For the second order condition

$$\frac{d^2\Pi}{dQ^2} = -2 < 0$$

$\therefore$ $Q = 5.5$ provides a relative maximum

$$\Pi = 6.25$$

1. Determine maxima and/or minima of the following function:

$$y = -\frac{1}{3}q^3 + 8q^2 - 39q - 50$$

2. The total cost of producing a given commodity is

   TC = ¼ x^2 + 35x + 25 and the price of the commodity is P = 50 - ½ x.

   i. Find the level of output which yield the maximum profit
   ii. Show that average cost is minimum at this output level.

3. Cost function of a perfectly competitive firm is TC = 1/3 q^3 – 5q^2 + 30q + 10

   If price p = 6, find the profit maximizing output level.

4. For a new product, a manufacturer spends Rs. 100,000 on the infrastructure and the variable cost is estimated as Rs.150 per unit of the product. The sale price per unit was fixed at Rs.200. Find the break-even point.

5. A manufacturing company finds that the daily cost of producing x items of a product is given by C(x) = 210x+7000.

(i) If each item is sold for Rs. 350, find the minimum number that must be produced and sold daily to ensure no loss.

(ii) If the selling price is increased by Rs. 35 per piece, what would be the break-even point?

6. The cost function for x units of a product produced and sold by a company is C(x)=2500+0.005x2 and the total revenue is given as R = 4x. Find how many items should be produced to maximize the profit. What is the maximum profit?

7. If the total cost function C of a product is given by $C = 2x\left[\frac{x+7}{x+5}\right]+7$

Prove that the marginal cost falls continuously as the output increases.

8. Total cost function of a firm is given as $TC = \frac{1}{3}q^3 - 4.5q^2 + 14q + 22$ Find the output level that minimize total cost (TC).

9. Total cost function and demand functions of a firm respectively are

$$TC = \frac{1}{3}q^3 - 8.5q^2 + 50q + 90 \quad \text{and } 22\text{-}0.5q\text{-}P = 0.$$

Find the output level that maximize the total revenue (TR) and the profit (Π).

10. Short production function of a firm is $Q = 6L^2 \text{-} 0.4L^3$

Q is the output and L is labor input.

i. Find average product (AP) and marginal product (MP) of labor input.

ii. Find the quantity of labor which maximize output'

iii. Find the level of output which maximize average product of labor.

11. For a new product, a manufacturer spends Rs 100,000 on the infrastructure and the variable cost is estimated as Rs 150 per unit of product. The sale price per unit is fixed at Rs 200. Find the break-even point of the firm.

12. The total revenue received from the sale of x units of a product is given by

$R(x) = 12x + 2x^2 + 6.$

Find (i) the average revenue

(ii) the marginal revenue

(iii) marginal revenue at $x = 50$

(iv) the actual revenue from selling 51st item