

අනුකලනය - Integration

අනුකලනය, අවකලනයේ ප්‍රතිවිරුද්ධ ක්‍රියාවලියයි. ශ්‍රිතයක අවකලය නැතහොත් ව්‍යුත්පන්නය දී ඇති විට අනුකලනය භාවිතයෙන් මූලික ශ්‍රිතය සෙවිය හැකි ය.

$F(x)$ යනු x විචල්‍යයේ ශ්‍රිතයක් යැයි සිතමු.

$$F(x)\text{හි අවකලය } \frac{d[F(x)]}{dx} = f(x)$$

මෙහි $F(x)$ යනු $f(x)$ හි අනුකලය (integral) ද $f(x)$ යනු අනුකලනය (integrand) ද වේ.

$f(x)$ හි අනුකලනය පහත දැක්වෙන පරිදි ලිවිය හැකි ය.

$$\int f(x)dx = F(x)$$

dx මගින් අනුකලනය x විෂයෙහි සිදු කරන බව දැක්වේ.

- \int අනුකලනය දැක්වෙන ලකුණයි. $f(x)$ අනුකලනය ද c නියතයක් ද වේ.

- c නියතය විවිධ අගය ගත හැකි ය. එයට අනුකූලව $f(x)dx$ ශ්‍රිත රාශියක් පැවතිය හැකි ය.

$$y = x^4 \text{ නම් } \frac{dy}{dx} = 4x^3$$

- $\frac{dy}{dx} = 4x^3$ දී ඇති විට අවකලනයේ ප්‍රතිවිරුද්ධ ක්‍රියාවලිය මගින් y සෙවිය හැකි ය. ඒ

අනුව $\int 4x^3 dx = x^4$

කෙසේ වුව ද, $\frac{dy}{dx} = 4x^3$ වන x හි ශ්‍රිත රාශියක් පැවතිය හැකි ය.

නිදසුන් වශයෙන් එය,

$$y = x^4 + 1, \quad y = x^4 - 5, \quad y = x^4 + a \quad \text{යන ඒවායේ අවකලයට ද}$$

සමානය.

- එම නිසා ඉහත සෑම ශ්‍රිතයකම අනුකලයට ගැලපීම සඳහා හැම විටම අනිශ්චිත අනුකලවලට නියතයක් (c) එකතු කරනු ලැබේ.

$$\therefore \int 4x^3 dx = x^4 + c$$

අනුකලනය දෙආකාරයකි:

- i. නිශ්චිත අනුකලනය (definite integration): අනුකලය නිශ්චිත සංඛ්‍යාත්මක අගයක් හෝ සංකේතයකි.
- ii. අනිශ්චිත අනුකලනය (indefinite integration): අනුකලය නිශ්චිත අගයක් නොව ස්වායත්ත විචල්‍යයේ ශ්‍රිතයකි.

අනුකලන නීති Rules of Integration

Rule 1. Constant function rule

i. $\int k dx = kx + c$

$\therefore dkx/dy = k$

ii. $\int 8 dx = 8x + c$

If $y = 8x + 5$, $dy/dx = 8$

iii. $\int dx = x + c$

$\int 8 dx = 8x$ මූලික ශ්‍රිතයේ නියතය නියෝජනය කිරීමට c ඇතුළත් කෙරේ.

iv. $\int -dx = -x + c$

Rule 2: the Power Rule

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad ; n \neq -1$$

$$\text{e.g. (i) } \int x^5 dx = \frac{1}{6} x^6 + c$$

$$\text{e.g. (ii) } \int \frac{1}{x^4} dx =$$

$$\text{e.g. (iii) } \int \sqrt{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = ?$$

Rule 3. the Integral of a Multiple

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

; k is a constant

e.g. (1) $\int 2x^3 dx = 2 \int x^3 dx = \frac{1}{2} x^4 + c$

e.g. (2) $\int 6y^4 dy = ?$

e.g. (3) $\int 16x^{-3} dx =$

Rule 4. the Integral of a Sum or Difference

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

e.g. (1) $\int (2x^2 - 5x + 3) dx = 2\int x^2 dx - 5\int x dx + 3\int dx$

Ex. (1) $\int \frac{3x^2 - 4x + 1}{x} dx$

Ex (3) $\int \sqrt{x}(3 - 4x) dx$

Ex. (2) $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx$

Rule 5. Generalized Power Function Rule

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{(n+1)a} + c$$

Ex. i. $\int (4x + 2)^{1/2} dx = ?$

Ex. iii. $\int \frac{3}{\sqrt{4-5x}} dx$

Ex. ii. $\int (x^3 + 1)^2 dx = ?$

Ex. iv. $\int (2x + 1)^{1/3} dx$

Rule 6. the Logarithmic Rule

Rule 6.1 $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \quad x \neq 0$

i. $\int \frac{3}{x} dx = 3 \int \frac{1}{x} dx = 3 \ln|x| + c$

ii. $\int \frac{3}{2x-1} dx = ?$

iii. $\int \frac{5}{(2-7x)} dx = ?$

Rule 6.2 $\int \frac{1}{f(x)} dx = \frac{\ln[f(x)]}{f'(x)} + c$

e.g. (i) $\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{\ln(ax+b)}{a} + c$

Ex. (1) $\int \frac{1}{(5x + 3)} dx = ?$

Ex. (2) $\int \frac{1}{(2x^2 + 5x + 2)} dx = ?$

Rule 6.3 If $f(x)$ is a function of x and its differential coefficient with respect to x is $f'(x)$. The derivative of $\ln[f(x)]$ is

$$\frac{d \ln[f(x)]}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\therefore \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$$

e.g. i. $\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln|x^2 + 1|$

Ex (1) $3 \int \frac{x}{x^2 + 2} dx =$

Ex (3) $2 \int \frac{x^2 + 2x}{(2x^3 + x^2 + 1)} dx = ?$

Ex. (2). $\int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx$

Rule 7: the Exponential Rule

Rule 7.1. $\int e^x dx = e^x + c$

e.g. $\int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + c$

Rule 7.2 $\int e^{f(x)} dx = \frac{e^{f(x)}}{f'(x)} + c$

Ex. $\int (e^{4x} - 3x^2 + 2e) dx = ?$

Ex. (1) $\int e^{4x+3} dx = ?$

Ex. (2) $\int \frac{e^{3x} + e^{\frac{1}{2}x} - e}{e^x} dx = ?$

Rule 7.3 When $y = e^{f(x)}$, $\frac{d[e^{f(x)}]}{dx} = e^{f(x)} f'(x)$

$$\therefore \int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$$

e.g. (i) $\int e^{2x^2} 4x dx = e^{2x^2} + c$

e.g. (ii). Find indefinite integral of $\int xe^{x^2} dx$

$$f(x) = x^2 \text{ and } f'(x) = 2x$$

To apply the above rule we have to adjust the original function as,

$\frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx$ There is not a fundamental difference between the original function and this function.

We can apply the above rule for this function

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} + c$$

Ex. (i). $\int x e^{x^2+3} dx$

$$f(x) = x^2 + 3 \quad \text{and} \quad f'(x) = 2x$$

Rule 8: the Substitution rule

e.g. (i) Evaluate $\int 2x(x^2 + 1)dx$

Let $u = x^2 + 1$; then $du/dx = 2x$ or $dx = du/2x$.

Now $du/2x$ can be substituted for dx of the above function.

$$\begin{aligned}\therefore \int 2x(x^2 + 1)dx &= \int 2xu \frac{du}{2x} = \int u du \\ &= \frac{1}{2}u^2 + c \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 1)^2 + c \\ &= \frac{1}{2}(x^4 + 2x^2 + 1) + c\end{aligned}$$

e.g. ii $\int 2x(x^2 + 8)^3 dx$

Ex. (1)

$$\int (x^3 + 2)^2 3x^2 dx = ?$$

Ex. (2)

$$\int (x^3 + 2)^{\frac{1}{2}} x^2 dx = \frac{1}{3} \int (x^3 + 2)^{\frac{1}{2}} 3x^2 dx = ?$$

කොටස් වශයෙන් අනුකලනය - Integration by Parts

When $u=f(x)$ and $v =g(x)$

$$y = uv$$

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

දෙපසම x විෂයෙහි අනුකලනය කිරීමෙන්

$$\int \frac{d(uv)}{dx} dx = \int u \frac{dv}{dx} dx + \int v \frac{du}{dx} dx$$

$$uv = \int u dv + \int v du$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

v විෂයෙහි u වල අනුකලය, u විෂයෙහි v වල අනුකලය uv වලින් අඩුකිරීමෙන් ලැබේ.

e.g. $\int x e^x dx$

We will defined $x = u$ and $dv = e^x dx$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

Since $dv = e^x dx$, $v = e^x$

$$\therefore du = dx$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x du$$

$$= x e^x - \int e^x dx \quad \ominus \quad du = dx$$

$$= x e^x - e^x = e^x (x - 1) + c$$

නිශ්චිත අනුකල - The definite integral

The indefinite integral of a continuous function $f(x)$ is:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

If we choose two values of x in the domain, say a and b ($b > a$), substitute them successively into the right side of the above equation and form the difference we get a numerical value that is independent of the constant c .

$$[F(b) + c] - [F(a) + c] = F(b) - F(a)$$

This value is called the **definite integral** of $f(x)$ from a to b . a and b are lower and upper limits of integration, respectively.

Now, we will modify the integration sign to indicate the definite integral of $f(x)$ from **a** to **b** as:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= [F(x) + c]_a^b = [F(b) + c] - [F(a) + c] \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Evaluate the following definite integrals

1. $\int_2^4 3x^2 dx = ?$

2. $\int_1^2 (6x^2 + 8x + 1) dx = ?$

$$3. \int_0^2 (x + 7)^3 dx = ?$$

$$4. \int_a^b k e^x dx = ?$$

$$\begin{aligned}
 5 \quad \int_0^4 \left(\frac{1}{1+x} + 2x \right) dx &= \left[\ln|1+x| + x^2 \right]_0^4 \\
 &= [\ln 5 + 16] - [\ln 1 + 0] \\
 &= \ln 5 + 16 \quad \ominus \ln 1 = 0
 \end{aligned}$$

Basic Properties of Definite Integral

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \quad \text{where } a < b < c$$

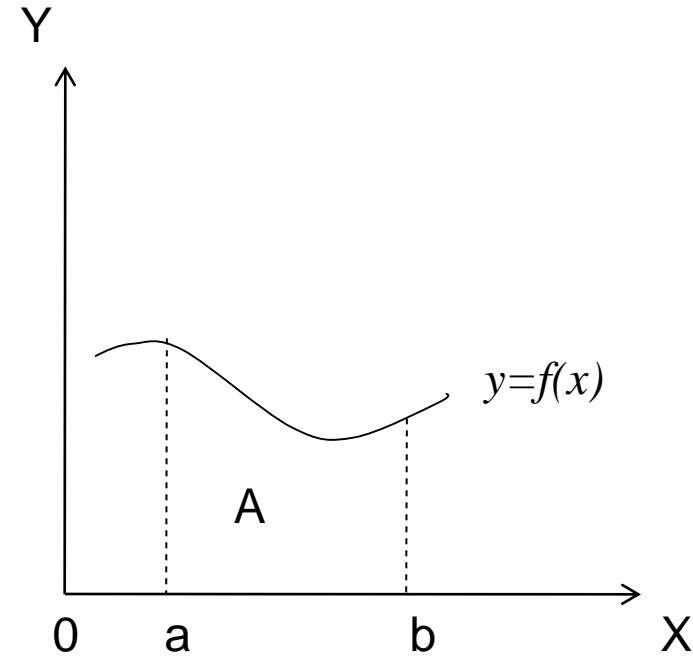
The Definite Integral as an Area

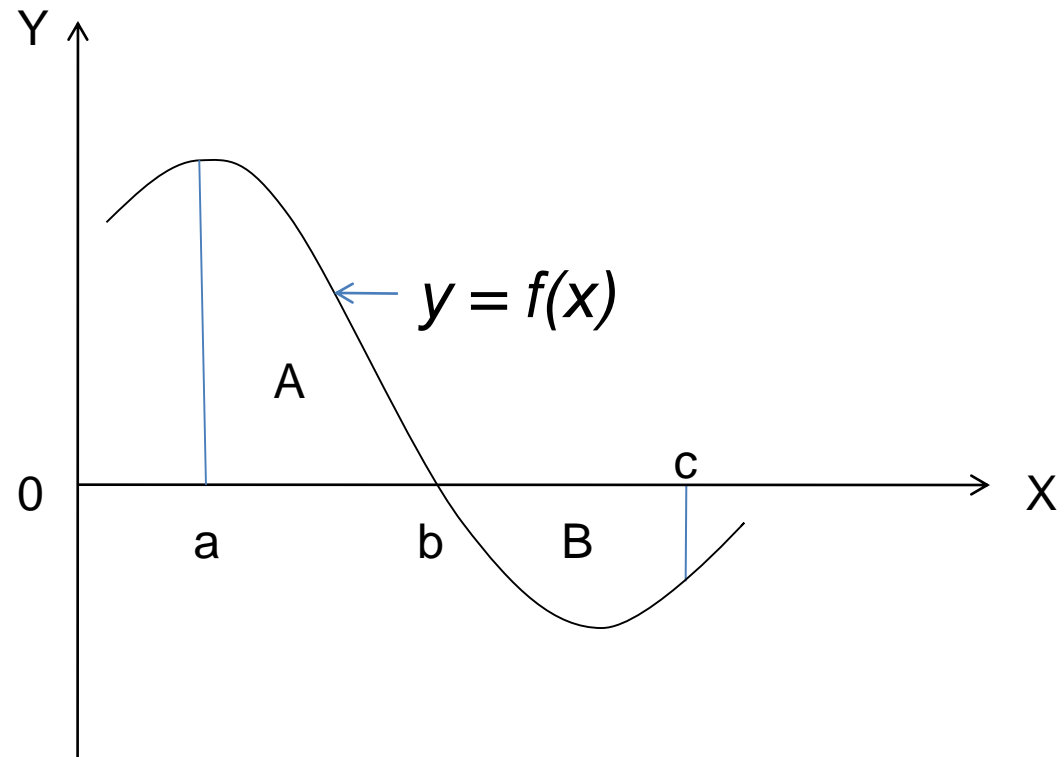
The area of a region bounded by the curve $y = f(x)$, and by the x axis, on the left by $x = a$, and on the right by $x = b$ is given by,

$$\text{Area (A)} = \int_a^b f(x) dx$$

If the curve $y = f(x)$ lies below the x axis, then

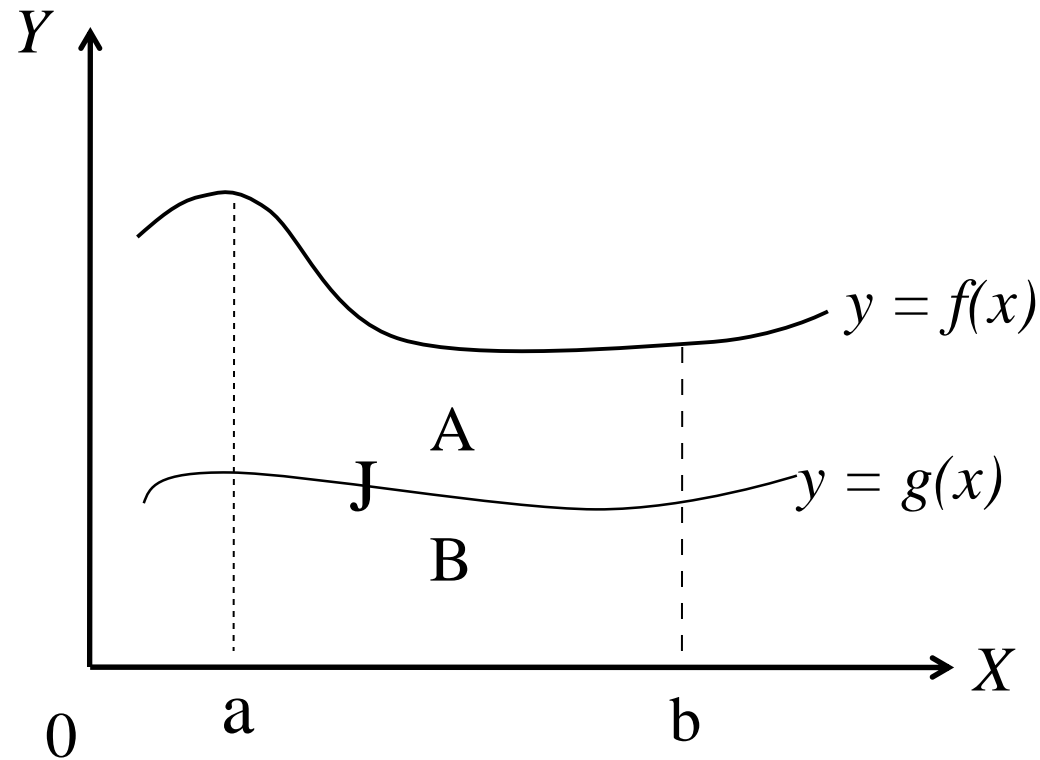
$$\text{Area (A)} = -\int_a^b f(x) dx$$





$$\text{The area (A) + B) = } \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

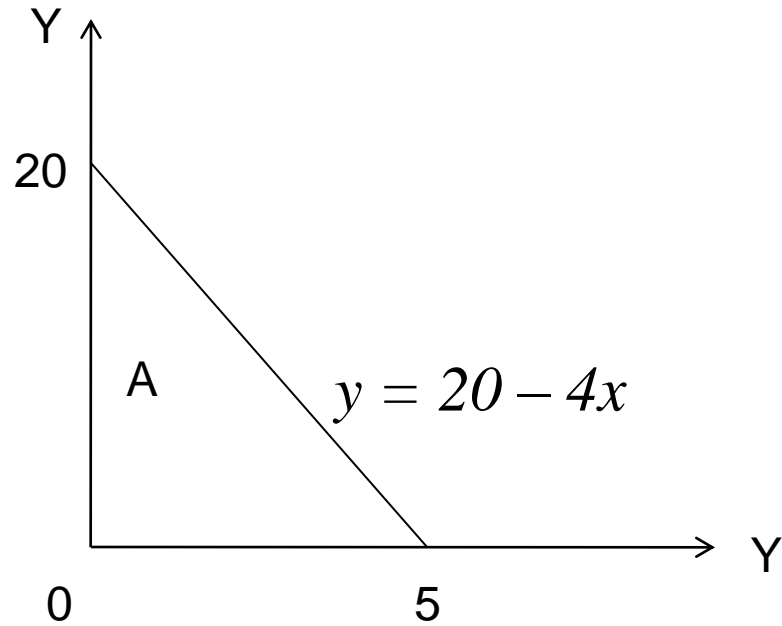
IF $f(x)$ and $g(x)$ are the two functions of x and $f(x) > g(x)$



$$\text{Area (A)} = \text{Area (J)} - \text{Area (B)}$$

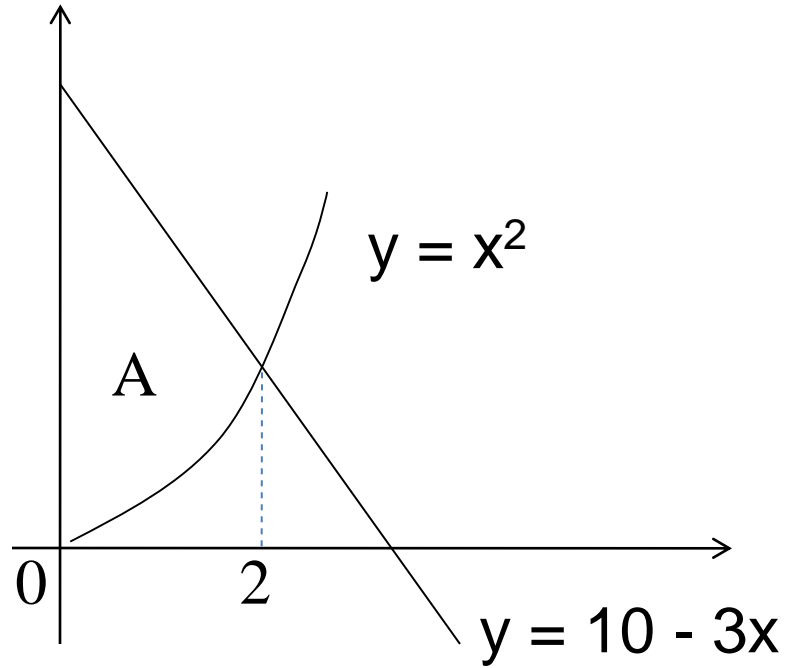
$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

e.g.1. Determine the area under the curve given by the function $y = 20 - 4x$ over the interval 0 to 5.



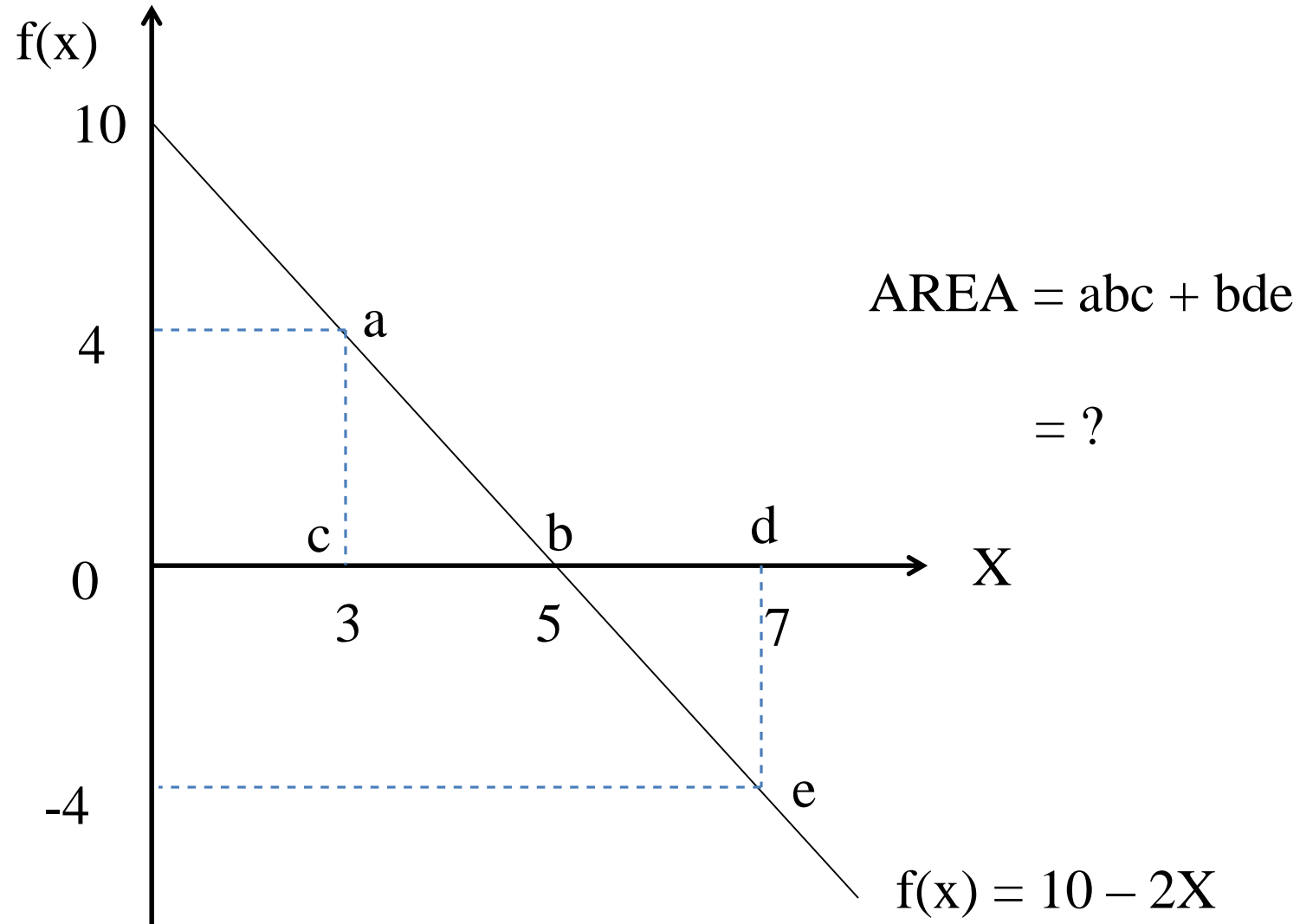
Area (A) = ?

e.g. 2 Find the area bounded by the functions $y = x^2$, and $y = 10 - 3x$ and Y axis.



$$A = \int_0^2 (10 - 3x) dx - \int_0^2 x^2 dx$$

3. Determine the area between the curve of $f(x) = 10 - 2X$ and the X axis for values of $X = 3$ to $X = 7$.



Multiple Integral

The integral of a function that include more than one variable is defined as *Multiple integral*.
Indefinite integral of a two variable function is given by,

$$\iint f(x, y)dydx$$

Definite integral of a two variables (x and y) function is given by

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dydx$$

e.g. If the joint probability density function of variables x and y is $f(x,y) = (x+y)$. Find the probability $p = (0 < x < 1/2, 0 < y < 1/4)$

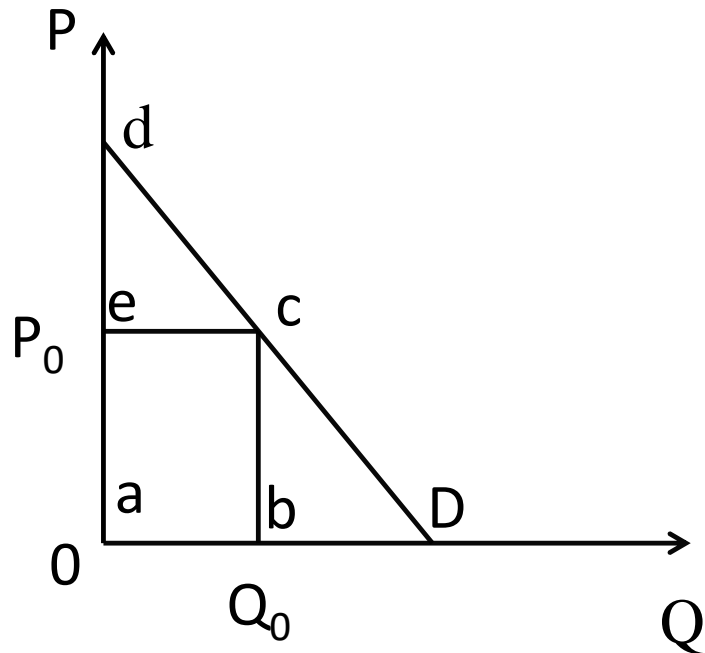
$$\begin{aligned} \int_0^{1/4} \int_0^{1/2} (x + y)dx dy &= \int_0^{1/4} \left[(xy + \frac{y^2}{2})dx \right]_0^{1/2} \\ &= \int_0^{1/4} \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{32} \right) dx \end{aligned}$$

$$\int_0^{1/2} \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{32} \right) dx = \left[\frac{x^2}{8} + \frac{x}{32} \right]_0^{1/2}$$
$$= \left[\frac{1}{32} + \frac{1}{64} \right] - [0]$$

$$\int_0^{1/4} \int_0^{1/2} (x + y) dx dy = \frac{3}{64}$$

Consumer surplus

Consumer surplus is the difference between what a consumer pays for an item and what he is willing to pay. It (CS) measures the net benefit that a consumer enjoys from purchasing a particular commodity in the market.



Demand function describes willingness to pay for an item. Equilibrium price and quantity are P_0 and Q_0 respectively. Consumer is willing to pay a higher price than P_0 , for all quantities less than Q_0 . However, he actually pays only P_0 price for all units.

The 'total value' of their purchases is measured by the area *abcd*. The 'total expenditure' is given by area *abce*. The difference between total value and the total expenditure is the surplus value that they are not paying.

Integral calculus can be used to estimate consumer surplus.

e.g. (1) Consumer's demand function for an item has been estimated to be

$$P = 30 - 2Q$$

Where, P is the unit price (Rs.)

Q is the monthly per capita consumption of the item (kg per month).

Determine the total expenditure and consumer surplus when the price per unit is Rs 5.

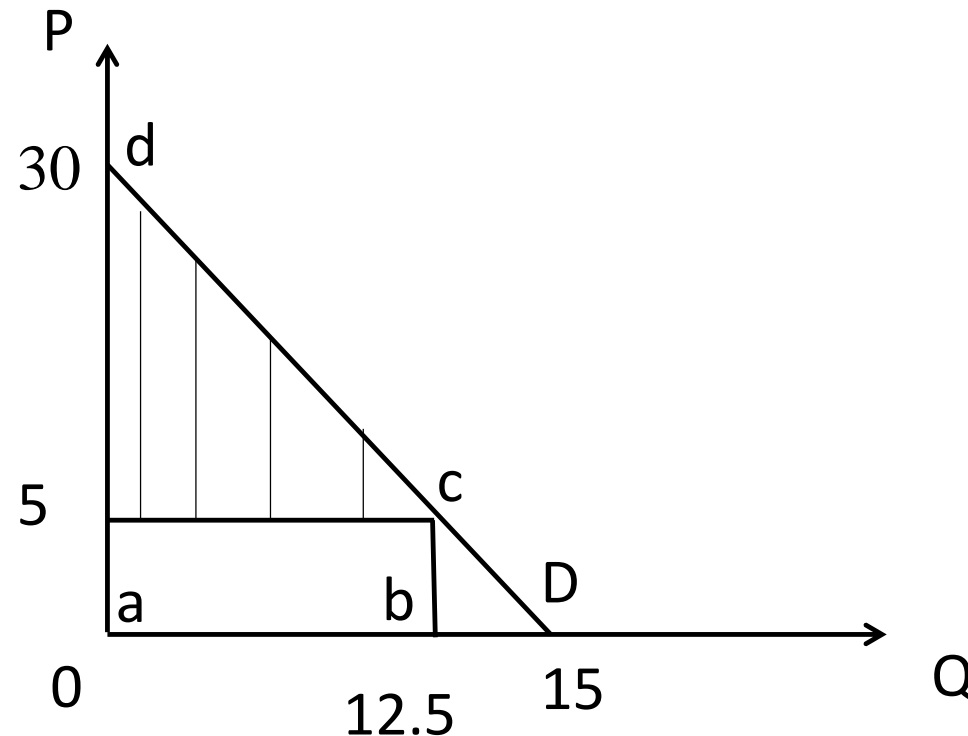
Quantity demanded,

$$P = 30 - 2Q$$

$$Q = \frac{30 - p}{2}$$

When $P = 5$

$Q = 12.5$ units



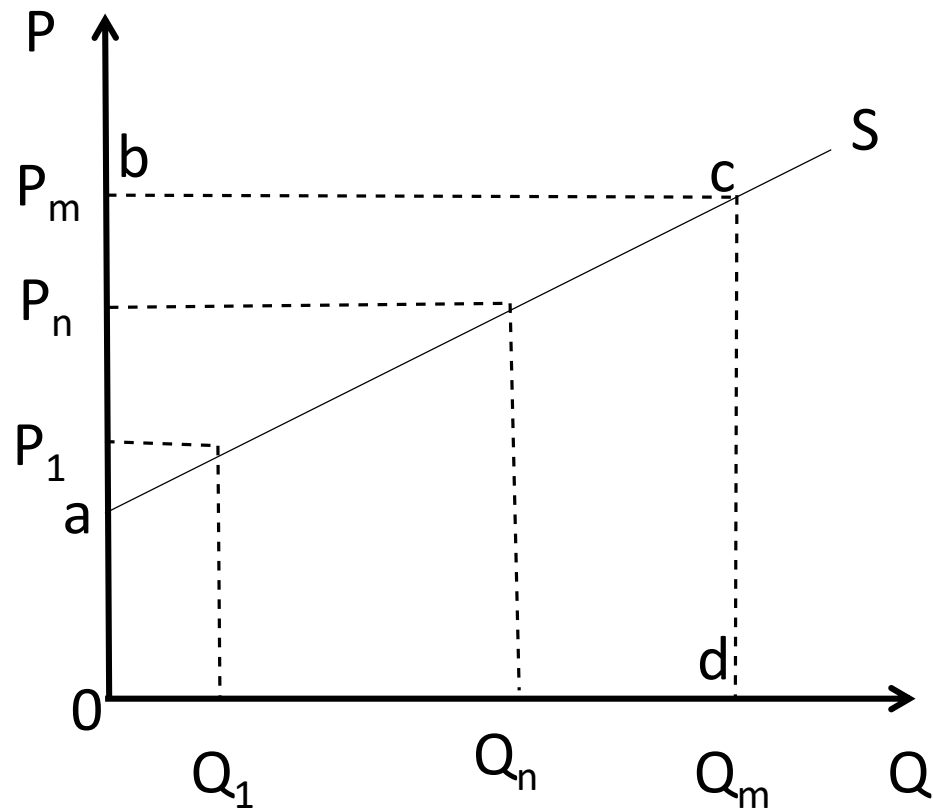
Total expenditure $TE =$

Total value of purchases $TV=?$

Consumer surplus $CS = TV-TE$

Producer surplus

A similar concept to consumer surplus applies to producer. It is called 'producer surplus'. It measures the payments that producers receive for a quantity of the product than what they expect.



Supply curve of the figure shows the locus of minimum prices that must be paid to induce producers to supply different quantities of their products.

For example, to provide Q_1 they expect P_1 price and to provide Q_n they expect P_n price. However, they receive market price P_m for all units (Q_m) placed on the market.

Producers' total revenue is the product of $P_m Q_m$ or the area $Obcd$. The expected revenue to provide Q_m equal to the area $0acd$. Producer surplus is the difference between area $Obcd$ and $0acd$. i.e. area cbc .

e.g. The supply function of a producer which supply a certain product is given by $P = 1000 + 50 Q$. Where P is the unit price and Q is the quantity supplies each day.

Determine producer surplus if he sell the product for Rs 2000 each.

Economic Applications

1. ආයතනයක ආන්තික පිරිවැය ශ්‍රිතය (MC) $C' = 2e^{0.2Q}$ ද ස්ථාවර පිරිවැය $C_F = 90$ වේ නම් මුළු පිරිවැය ශ්‍රිතය (TC) සොයන්න.
2. ආයතනයක ආන්තික පිරිවැය ශ්‍රිතය $MC(q) = (6q^2 + 4)\sqrt{2q^3 + 4q + 36}$ ද ස්ථාවර පිරිවැය $C_F = 1088$ ද වේ නම් මුළු පිරිවැය ශ්‍රිතය (TC) සොයන්න.
3. රටක ආන්තික ඉතුරුම් ශ්‍රිතය $S'(Y) = 0.3 - 0.1Y^{-1/2}$ වේ. ආදායම 81 වන විට සමාහාර ඉතුරුම් (S) ගුණය වේ නම් ඉතුරුම් ශ්‍රිතය $S(Y)$ සොයන්න.

4. Consumer's demand function for a given commodity has been estimated to be $P = 30 - 2Q$

where, P is the price of a unit of the commodity and Q is the per capita consumption of the commodity per person per month. Determine (a) the total expenditure and (b) the consumer surplus when the price of a unit is 5.

5. If the supply function of a commodity is $P = 1000 + 50Q$

where, P is the price per unit and Q is the number of units sold each day. Find the producer surplus when the price of a unit of the commodity is 2000.

6. If the willingness of a nurse to provide her service is defined by the supply function $W = 2.5 + 0.5H$

where, W is the wage rate per unit

H is hours of work provided each week.

Determine the producer surplus paid to the nurse if the prevailing wage rate is 9 per hour.

7. නිමැවුම් මට්ටම q වන විට එක්තරා නිෂ්පාදන ආයතනයක ආන්තික පිරිවැය $3(q - 4)^2$ වේ.

නිමැවුම මට්ටම 6 සිට 10 දක්වා වැඩිවන විට මුළු නිෂ්පාදන පිරිවැය කෙපමණ ප්‍රමාණයකින් ඉහළ යයි ද?

8. මෙතැන් සිට වසර t ගණනකදී පළමු ආයෝජන සැලැස්ම මගින් වාර්ෂිකව රුපියල් (දහස්)

$P_1'(t) = 50 + t^2$ ලාභ අනුපාතයක් සහ දෙවැනි ආයෝජන සැලැස්මෙන් රුපියල් (දහස්)

$P_2'(t) = 200 + 5t$ ලාභ අනුපාතයක් ලැබෙන්නේ යැයි ද පළමු වසර N සඳහා $P_2'(t) \geq P_1'(t)$

යන කොන්දේසිය තෘප්ත වන්නේ යැයි ද සිතමු.

(i) වසර කොපමණ ගණනක් දෙවැනි ආයෝජනයේ ලාභ පළමු ආයෝජනයේ ලාභ ඉක්මවා යන්නේ ද?

(ii) ඉහත නිශ්චය කරන ලද වසර ගණන තුළ ශුද්ධ අතිරික්ත ලාභය ගණනය කර එය ප්‍රස්තාර භාවිතයෙන් කේන්ද්‍රඵලයක් වශයෙන් දක්වන්න

9. වසර t ගණනක් පැරණි නිෂ්පාදන යන්ත්‍රයක වාර්ෂිකව ආදායම් ප්‍රවාහය රුපියල් $R'(t) = 5000 - 20t^2$ වන අතර එහි මෙහෙයුම් හා සේවා වියදම වාර්ෂිකව රුපියල් $C'(t) = 2000 + 10t^2$ වේ.

i. යන්ත්‍රයේ ලාභදායකත්වය නැතිව යාමට වසර කීයක් ගත වේ ද?

ii. ඉහත නිශ්චය කරන ලද වසර ගණන තුළ යන්ත්‍රයෙන් ජනනය කෙරෙන ශුද්ධ ඉපැයීම් ගණනය කරන්න.

10. කරගකාරී වෙළෙඳපොලක ඉල්ලුම් හා සැපයුම් ශ්‍රිත පහත පරිදි වේ;

$$D(q) = \frac{24}{q+2} \text{ and } S(q) = -8 + q. \text{ පරිභෝජක අතිරික්තය හා නිෂ්පාදක අතිරික්තය}$$

සොයන්න.

11. මෝටර් රථ ටයර නිෂ්පාදන සමාගමක් ඇස්තමේන්තු කර ඇති ආකාරය අනුව ගැනුම්කරුවන් විසින් ඒකකයක මිල රුපියල් $D(q) = -0.1q^2 + 90$ වන විට ටයර q (දහස්) ප්‍රමාණයක් ඉල්ලුම් කරන අතර ආයතනය එම ප්‍රමාණය සපයන්නේ $S(q) = 0.2q^2 + q + 50$. මිලට ය.

i. සමතුලිත මිල හා ප්‍රමාණය ගණනය කරන්න.

ii. සමතුලිතයේදී පරිභෝජක අතිරික්තය හා නිෂ්පාදක අතිරික්තය ගණනය කරන්න.